This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

600041772R

32.

630.

600041772R

32.

630.

600041772R

32.

630.

Geometriſche Aufgaben

zum

Gebrauch bei Vorleſungen, beim Unterricht an höhern Lehranſtalten

und zum

Selbſt-Studium,

von

L. Oettinger.
Profeſſor in Heidelberg.

Erſte Abtheilung.

Karlsruhe,
in der Chr. Fr. Müller'ſchen Hofbuchhandlung.

1832.

630.

Vorrede.

Es wäre überflüssig, die Brauchbarkeit, welche die Geometrie für das Leben hat, den Nutzen und Einfluß, den sie auf die Entwicklung der menschlichen Geisteskraft durch Bildung des Verstandes, Erweckung des Scharfsinnes und der Urtheilskraft äussert, als eine bekannte Sache, näher erörtern zu wollen, um die Erscheinung der vorliegenden Sammlung geometrischer Aufgaben, die der Anwendung einer so wichtigen Wissenschaft gewidmet ist, zu rechtfertigen.

Denn, wenn schon die einfache Einsicht in den Bau und das Gefüge einer Wissenschaft geeignet ist, die Verstandesthätigkeit des Menschen zu bilden und zu schärfen; so muß es die Anwendung ihrer einzelnen Doctrinen auf vorgelegte Probleme, da sie neben der Auffassungskraft vorzugsweise die eigene Thätigkeit des menschlichen Geistes in Anspruch nimmt, in einem weit höhern Grade thun und nicht allein den Verstand und die Urtheilskraft beleben und schärfen, sondern auch die Erfindungsgabe und den Forschungsgeist anregen und wecken.

Hiezu kömmt, daß die Anwendung allein der sicherste Weg ist, sich die Lehren einer Wissenschaft vollkommen anzueignen, das Lückenhafte auszufüllen, dem Mangelhaften nachzuhelfen und eine noch unsichere und schwankende Grundlage zu befestigen, denn nichts entschwindet leichter dem Gedächtnisse, als das, wovon wir keine Anwendung zu machen wissen, und nichts prägt sich ihm fester und sicherer ein, als das, was durch Anwendung und eigene Thätigkeit sein Eigenthum geworden ist.

Von dieſen Anſichten ausgehend, glaubt der Verfaſſer eine nicht ganz unwillkommene Arbeit zu liefern, und wünſcht, daß ſie günſtig aufgenommen werden möge.

Es fehlt zwar keineswegs an Werken über geometriſche Aufgaben, aber keines entſprach dem Zweck und der Anſicht, die ſich der Verfaſſer von einem ſolchen Werke bildete, denn es ſind größtentheils Sammlungen, die ſich entweder nur über einzelne Zweige erſtrecken, und daher nicht von allgemeiner Anwendung und Brauchbarkeit ſind, oder ſie ſind, wenn auch von größerer Ausdehnung, eine Zuſammenſtellung verſchiedenartiger, nicht nach einem Plane geordneter Aufgaben und nicht immer reichhaltig genug, um einer größern Anforderung zu genügen, ſo ſchätzbar ſie auch im Einzelnen ſeyn mögen.

Dieß hat den Verfaſſer veranlaßt, eine Sammlung geometriſcher Aufgaben, von größerm Umfange und zweckmäßiger zuſammengeſtellt, zu bearbeiten und zur Benutzung vorzulegen.

Die Ausdehnung, welche dieſe Sammlung hat, läßt ſich aus den Ueberſchriften der acht Kapitel der zwei Abtheilungen, worein das Werk zerfällt, erkennen.

Erſte Abtheilung.

1) Aufgaben über Linien und Winkel und ihre Verbindung unter einander.
2) Aufgaben über geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.
3) Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.
4) Aufgaben über das gleichſchenklige und gleichſeitige Dreieck.

Zweite Abtheilung.

5) Aufgaben über das Dreieck im Allgemeinen.
6) Aufgaben über das Viereck.
7) Aufgaben über den Kreis.
8) Aufgaben über größte und kleinſte Werthe.

Ueber Plan und Anordnung iſt folgendes zu bemerken:

Die vorliegende Sammlung ſollte in einem Bande ausgegeben werden. Da ſie aber gegen Erwarten zu einer größern Bogenzahl, als ſich anfänglich vermuthen ließ, anlief, ſo wurde ſie des bequemern Gebrauchs wegen in zwei Abtheilungen mit fortlaufender Seiten- und Paragraphenzahl getrennt.

In dieſe Sammlung ſind die Aufgaben über Verwandlung und Theilung der Figuren, ſo wie über algebraiſche Geometrie nicht aufgenommen (auch ein beſonderer Abſchnitt über vermiſchte Aufgaben hätte ſich bearbeiten laſſen); denn eine ſolche Ausdehnung lag vorerſt nicht im Plane und hätte das Werk leicht zu theuer und dadurch unzugänglich machen können; ſie konnte auch um ſo mehr umgangen werden, da über dieſe Zweige ſchon Sammlungen vorhanden ſind. Sollte die vorliegende Sammlung ſich einer günſtigen Aufnahme erfreuen, ſo kann eine dritte Abtheilung in Uebereinſtimmung mit dem Ganzen nachfolgen.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben der einzelnen Kapitel iſt der Verfaſſer von dem Leichtern zum Schwerern übergegangen und hat ſich bemüht, die Aufgaben ſo aneinander zu reihen, daß ſie eine Stufenfolge bilden.

Zuerſt ſind die Aufgaben, welche ſich aus der kleinſten Anzahl der Elemente conſtruiren laſſen, gegeben und aufgelöst; dann die, deren Conſtruction auf einer größern Elementen-Zahl beruht u. ſ. f.

Bei jeder Abſtufung aber wurden die Aufgaben, die ſich durch die einfachen Elemente direkt erzeugen laſſen, vor die, welche zur Conſtruction Summen, Differenzen ꝛc. erfordern, behandelt, wie ſich dieß aus der Anordnung in den Kapiteln leicht erkennen läßt.

Dabei war nicht zu vermeiden, daß nicht leichtere, oder auch in andern Büchern ſchon behandelte Aufgaben

aufgenommen wurden. Sie sind mitgetheilt, weil sie nach der Anlage des Ganzen am gehörigen Orte ihre Stelle finden mußten.

Wie fruchtbar diese systematische Behandlungsweise in Auffindung geometrischer Aufgaben ist, wird die Reichhaltigkeit der vorliegenden Sammlung, da in ihr die Zahl der bekannten durch eine nicht unbedeutende Zahl neuer Aufgaben vermehrt ist, zeigen. Insbesondere wird dieß sehr klar hervortreten, wenn man diese Methode zur Auffindung neuer Aufgaben auf einen speziellen Fall z. B. auf das rechtwinklige Dreieck anwendet, wo als Constructions-Elemente Kathete, Hypotenuse, Winkel, Abschnitte, Höhe, Quadrate, Summen, Unterschiede, Produkte dieser Elemente, Inhalt, Hülfslinien, Verhältnisse, Theilpunkte u. s. w. zu Gebote stehen und ein unabsehbares Gebiet für die Erfindung und Combination öffnen. Ein systematisches Aufsteigen von einem Elemente zum andern und ein schickliches Anreihen derselben unter einander wird eine unglaubliche Menge sehr interessanter Aufgaben auffinden lassen. Das dritte Kapitel soll als ein Versuch, nach dieser Methode zu arbeiten, betrachtet werden. Mehr kann es nicht seyn. Der Zweck ist erreicht, wenn der Eifer zu weiterer Nachforschung angeregt ist.

Die Aufgaben über die verschiedenen Arten von Dreiecken sind in drei Kapitel abgetheilt; während man vielleicht erwartet hatte, sie als zusammengehörig und nach Analogie der Aufgaben über das Viereck in ein Kapitel gefaßt zu finden.

Diese Trennung wird sich aber durch die zweckmäßige Anordnung im Ganzen zu besserer Zusammenstellung und bequemerer Uebersicht rechtfertigen lassen. Dadurch war zwar nicht zu vermeiden, daß nicht manches frühere wiederkehrte, oder wiederkehren mußte. Jedoch ist es nie eine Wiederholung, sondern nur eine Anwendung auf ähnliche

Fälle, oder unter bestimmten Modifikationen zu nennen. Ein Zweck muß dem andern untergeordnet werden.

Was nun die Methode betrifft, nach der die vorliegenden Aufgaben behandelt sind, so ist keiner vorzugsweise gehuldigt und es sind wo möglich beide, die analytische oder algebraische und rein geometrische, gegeben. Es sollen nach dem Plane des Verfassers beide geübt werden, damit die andere helfe, wenn die eine ihre Dienste versagt.

Bei den Aufgaben, wo Winkel vorkommen, und also trigonometrische Formeln zur Auflösung nöthig geworden wären, ist keine analytische, als nicht hierher gehörig, gegeben. Im Spätern wurden die analytischen Auflösungen übergangen, weil sie zu viel Raum erfordert hätten.

Der Zweck nun war bei Bearbeitung der vorliegenden Aufgaben zweierlei: einerseits dem Lehrer ein Hülfsmittel an die Hand zu geben, um seinen Vortrag zu ergänzen und den Unterricht dadurch wirksamer zu machen; andererseits den Privatfleiß zu weiteren Fortschritten zu ermuntern, ihm ein Buch zur zweckmäßigen Beschäftigung darzubieten, um das Erlernte anwenden zu können; denn jeder Unterricht muß, wenn er anders wirksam seyn soll, durch Privatfleiß unterstützt werden.

Um diesem doppelten Zwecke zu entsprechen, hat der Verfasser geglaubt, dieser Sammlung eine größere Ausdehnung geben zu müssen, damit sie hinlänglich Material zur Auswahl biete. Eine erschöpfende Darstellung dieses Gegenstandes ist weder zu erwarten, noch zu verlangen, denn sie übersteigt die Kraft des menschlichen Geistes. Die Erfindungskraft des Menschen wird nie diejenigen Materien, über welche hier Aufgaben mitgetheilt sind (Dreiecke, Vierecke und Kreise) erforschen, noch weniger wäre ein günstiger Erfolg zu erwarten, wenn er das Fünfeck, Sechseck ꝛc. zum Gegenstand seines Forschens machte. Es muß

genügen, auf einen Weg aufmerksam zu machen, worauf man sich Gewandtheit und Geschicklichkeit im Erfinden und Auflösen der Aufgaben erwerben kann. Alles finden und geben, ist unmöglich.

Die Sammlung beginnt mit den leichtesten und einfachsten Aufgaben über Linien und Winkel im ersten Kapitel. Sie sind meistens als Vorbereitung für das Spätere zu betrachten, und sollen anderseits gleich dem ersten Unterrichte in der Geometrie als Uebungen und Anwendungen beigesellt werden, um die Urtheilskraft zu schärfen, Lust und Liebe zu weitern Fortschritten zu erwecken und dadurch den Unterricht erfolgreich zu machen. Denn Uebung und Anwendung kann nie frühe genug begonnen werden. Diese Umstände werden auch die größere Ausführlichkeit rechtfertigen.

Das zweite Kapitel soll zur Begründung der analytisch-constructionellen Geometrie dienen. Die darin mitgetheilten Lehren scheinen von der Wichtigkeit zu seyn, daß sie wohl in einem eigenen Abschnitte behandelt zu werden verdienen.

Im dritten Kapitel sind unter den Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck, bei deren Construction Winkel vorkommen, §. 197 — 206. nur solche gegeben, wobei der Scheitelwinkel vorkommt. Hierauf lassen sich die Fälle, wenn der Winkel an der Grundlinie gegeben ist, leicht zurückführen.

Den Punkt glaubt der Verfasser keineswegs unberührt lassen zu dürfen, daß die Bearbeitung geometrischer Aufgaben keineswegs ohne wissenschaftlichen Werth ist. Jede Auffindung einer neuen geometrischen Aufgabe ist zugleich die Begründung eines neuen Lehrsatzes über die Congruenz zweier Figuren, in denen die Elemente, woraus die Figur construirbar ist, einander gleich sind, denn es fließt aus der Construction unmittelbar der Schluß: daß aus den nämlichen Elementen wohl unzählige

Mal die gesuchte Figur gebildet werden könne, daß sie aber immer eine und dieselbe seyn müsse.

Zugleich folgt hieraus: daß die Auflösung einer geometrischen Aufgabe ein synthetischer Beweis für die Congruenz zweier Figuren unter gegebenen Bedingungen sey. Diese Behauptungen gelten jedoch nur von den s. g. bestimmten Aufgaben und dehnen sich nicht auf die Aufgaben, welche unbestimmt sind, aus.

Macht man von diesen Bemerkungen auf einzelne Fälle Anwendung, so erhält man z. B. unmittelbar folgende Lehrsätze:

1) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in beiden die Hypotenuse und die Summe, oder der Unterschied der Katheten gleich ist, §. 123 und 131.
2) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summen, welche die Hypotenuse mit jeder Kathete bildet, in beiden gleich sind, §. 151.
3) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn Umfang und Höhe in beiden gleich ist, §. 180.
4) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn in beiden Höhe und die Summe der Grundlinie und des Schenkels gleich sind, §. 191. u. s. w.
5) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind aber nur in bestimmten Fällen congruent, wenn der Schenkel und die Summe der Höhe und Grundlinie in beiden gleich ist, §. 195.

Die Anzahl dieser Lehrsätze läßt sich leicht weiter ausdehnen. Sie selbst sind als ein Beitrag zu der Lehre von der Congruenz der Figuren immer von wissenschaftlichem Werthe, obgleich dieser Gegenstand in den meisten Lehrbüchern der Geometrie nur spärlich behandelt und nur auf die ersten Prinzipien ausgedehnt wird.

Dieſen einleitenden Bemerkungen zufolge wünſcht der Verfaſſer die vorliegende Sammlung als einen Verſuch, Lehrern und Lernenden nützlich zu ſeyn, beurtheilt zu ſehen. Möge ſie mit eben ſo vielem Intereſſe für die Wiſſenſchaft aufgenommen werden, als ſie mit Liebe für dieſelbe geſchrieben ward.

Noch iſt die Güte meiner Freunde, des Herrn Domänenrathes Regenauer und Herrn Baurathes Dittler in Karlsruhe, zu erwähnen, die mir zu dieſem Werke ſehr ſchätzbare Beiträge lieferten, und von denen mir der Erſtere eine Sammlung von ungefähr 150 — 180 ſchon geordneter Aufgaben und ihre Auflöſungen mittheilte, die ich am gehörigen Orte aufgenommen habe.

Schließlich erlaube ich mir noch, die Literatur anzuzeigen, die mir über geometriſche Aufgaben zu Gebote ſtand, ob ich ſie gleich nach der Anlage des Ganzen nicht immer benutzen konnte. Ich glaube, daß dieſe Mittheilung manchem Leſer angenehm ſeyn wird, zumal man ſich hieraus überzeugen kann, was ſchon früher geleiſtet war und was davon in dieſe Sammlung aufgenommen wurde.

Praktiſche Uebungen für angehende Mathematiker von Dr. E. S. Unger; 2 Bände. Leipzig 1828 und 29.

Der 1te Bend enthält: das Berechnen, Verwandeln und Theilen der Figuren.

Der 2te Band: die Lehre vom Kreiſe mit einer Sammlung von Aufgaben.

L. Maſcheroni's Gebrauch des Zirkels, ins Deutſche überſetzt von J. P. Grüſon, mit einer Sammlung Aufgaben. Berlin 1825.

Lehrbuch der Geometrie für das Geſchäftsleben von G. A. Fiſcher; 2te Auflage. Dresden 1829.

Lehrbuch der Geometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1826.

Sammlung von Beiſpielen, Aufgaben und Lehrſätzen aus der Arithmetik, Algebra, Geometrie und ebenen Trigonometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1820.

Barycentrischer Calcul von A. F. Möbius. Leipzig 1827.
Geometrische Analysis von Joh. Leslie; aus dem Englischen übersetzt von J. P. Grüson. Berlin 1822.
Geometrie der Stellung von Carnot; übersetzt von Schumacher; 2 Bde. Altona 1810.
Lehrbuch der Geometrie von W. A. Förstemann; 2 Bde. Danzig 1827.
System der Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren v. M. G. Grabow. Frankfurt am Main 1828.
Lehrbuch der Geometrie von R. Unruh. München 1824.
Appollonius von Pergä ebene Oerter, wieder hergestellt von R. Simson. Uebersetzt von J. W. Cammerer. Leipzig 1796.
Geometrische Aufgaben von A. Richter; 1ter Theil. Lawsons Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Halberstadt 1829.
Geometrische Aufgaben nach der Methode der Griechen, von Dr. A. W. Diesterweg.
1te Sammlung. Berlin 1825.
2te " " Elberfeld 1828.
Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata, wieder hergestellt von R. Simson; nach dem Lateinischen frei bearbeitet von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1822.
Beiträge zur Lehre von den positiven und negativen Größen von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1831.
Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch; 2 Thle. Berlin 1805 und 1807.
Sammlung interessanter geometrischer Lehrsätze und Aufgaben von Fr. Ottemann. Leipzig 1824.
Mathematische Uebungsaufgaben von F. W. D. Snell. Gießen 1810.
Aufgaben über Dreiecke von J. Fr. Kroll. Halle 1826.

Lehrbuch über die vornehmſten Aufgaben aus der Ebenen- und Körpergeometrie von Dr. A. Hr. Chr. Gelpke. Leipzig 1818.

Verſuch einer Wiederherſtellung der Bücher des Apollonius von Pergä von den Berührungen, von Dr. C. G. Haumann. Breslau 1817.

Sammlung verſchiedener Aufgaben der Geometrie von L. Pouiſſant, aus dem Franzöſiſchen überſetzt von E. M. Hahn. Berlin 1806.

Geometriſche Aufgaben von J. F. Schaffer. Oldenburg 1816.

Sätze und Aufgaben aus der ebenen Geometrie, nach der Methode der Alten; 2te Sammlung; von J. Niefert. Coesfeld 1820.

Sammlung neuer mathematiſcher Aufgaben von A. von Forſtner. Berlin 1819.

Aufgaben zur Uebung der Analyſis von J. A. Eitelwein. Berlin 1793.

Aufgaben über das gradlinigte Dreieck von F. Strehlke. Königsberg 1827.

Reine Elementar-Mathematik von Dr. M. Ohm; 2ter Band. Berlin 1826.

Vollſtändiges Lehrbuch der reinen Elementar-Mathematik von F. A. Hegenberg; 2ter Theil. Berlin 1826.

Universal arithmetick written in Latin by Sir Jsaac Newton, translated by Ralphson. London 1769. (Das Lateiniſche Original ſtand mir nicht zu Gebot.)

Recueil de Problèmes résolus par de considérations purement géomètriques. Paris chez Courcier 1809.

Cours complet de Géométrie par N. J. Didier. Paris 1828.

Die trefflichen Werke von Carnot, Leslie, Möbius, Maſcheroni, Lehmus, Ohm, Dieſterweg, Förſtemann, Richter u. ſ. w. werden vielen Stoff zu weiteren Unterſuchungen bieten.

Heidelberg, im Oktober 1831.

Der Verfaſſer.

Inhalt.

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

Zweites Kapitel.

Geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichſchenklige und gleichſeitige Dreieck.

Erſtes Kapitel.

ſgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1 — 73., Pag. 1 — 86.

Aus drei gegebenen Linien ein Dreieck zu zeichnen, §. 1.

Aus zwei gegebenen Linien ein gleichſchenkliges Dreieck zu zeichnen, §. 2.

Aus einer Linie ein gleichſeitiges Dreieck zu zeichnen, §. 3.

Einen gegebenen Winkel an einen beſtimmten Punkt anzutragen, §. 4.

Eine oder mehrere Linien mit einer gegebenen durch einen oder mehrere Punkte parallel zu ziehen, §. 5.

Auf eine gegebene Linie von einem Punkte auſſerhalb derſelben eine ſenkrechte Linie zu fällen, §. 6.

Auf einen in einer Linie gegebenen Punkt eine ſenkrechte Linie zu errichten, §. 7.

An dem Endpunkte einer gegebenen Linie eine ſenkrechte Linie zu errichten, §. 8.

Eine gegebene Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, §. 9.

Eine gegebene Linie von einem gegebenen Punkte auſſerhalb derſelben in zwei gleiche Theile zu theilen, §. 10.

Eine gegebene Linie in drei oder mehr gleiche Theile zu theilen, §. 11.

Eine Linie in zwei oder mehrere Theile nach unter ſich gegebenen Verhältniſſen zu zerlegen, §. 12.

Die Größe einer Linie zu beſtimmen, welche der $\frac{m}{n}$te Theil einer gegebenen ſeyn ſoll, §. 13.

Es ſind zwei Linien gegeben. Man ſoll zwei andere Linien finden, welche mit der gegebenen die innern oder äuſſern Glieder einer geometriſchen Proportion bilden, §. 14.

Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden, §. 15.

16. Zu zwei gegebenen Linien die dritte geometriſche Proportionale zu finden, §. 16.

17. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometriſche Proportionale zu finden, §. 17.

18. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere arithmetiſche Proportionale zu finden, §. 18.

19. Zur Summe und Differenz zweier Linien die mittlere geometriſche Proportionale zu finden, §. 19.

20. Es iſt eine Linie gegeben und zwei Punkte auſſerhalb derſelben. Man ſoll einen Punkt in der Linie angeben, welcher von beiden Punkten gleich weit abſteht, §. 20.

21. Es iſt eine Linie und auſſerhalb derſelben ſind zwei Punkte gegeben. Man ſoll von den beiden Punkten zwei Linien mit einander parallel auf die gegebene Linie ziehen, daß die Summe beider dem Abſtande beider Punkte von einander gleich ſey, §. 31.

22. Es iſt eine Linie und auſſerhalb derſelben ſind zwei Punkte gegeben. Man ſoll von beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Linien auf die gegebene ziehen, daß ihre Summe dreimal ſo groß, als die Entfernung beider Punkte von einander iſt, §. 22.

23. u. 24. Es iſt eine begrenzte Linie und auſſerhalb derſelben ein Punkt gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt eine Linie ſo legen, daß zwei, von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene parallel gezogene, Linien der gegebenen gleich, die eine aber doppelt ſo groß als die andere ſey, oder in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen, §. 23. u. 24.

25. Es iſt eine gerade unbegrenzte Linie und auſſerhalb derſelben ein Punkt gegeben. Man ſoll von dem gegebenen Punkte aus eine Linie auf die gegebene ſo ziehen, daß ſie einen beſtimmten Winkel mit jener bilde, §. 25.

26. Es iſt eine unbegrenzte und eine auf ihr ſenkrecht ſtehende begrenzte Linie gegeben. Man ſoll einen gegebenen Winkel ſo auf erſtere tragen, daß der eine Schenkel in dieſe falle, der andere den Endpunkt der Senkrechten treffe, §. 26.

27.

Es iſt eine gerade Linie und ein Punkt auſſerhalb derſelben gegeben. Man ſoll zwei gegebene Winkel ſo auf die Linie tragen, daß ſich ihre Schenkel in dem gegebenen Punkte vereinigen, §. 27.

Es iſt eine Linie und zwei Punkte auſſerhalb derſelben gegeben. Man ſoll einen Punkt in der gegebenen Linie ſo beſtimmen, daß zwei von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien zwei gleiche Winkel an der Linie erzeugen, §. 28.

Es ſind zwei, in einem Punkte ſich durchſchneidende, Linien und ein Punkt zwiſchen beiden gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt eine Linie ſo legen, daß die Winkel, welche ſie mit den beiden Linien macht, einander gleich ſind, §. 29.

9. Es iſt eine Linie und auſſer ihr ein Punkt gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt eine gerade Linie ſo legen, daß die, von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene gefällten, Senkrechten in beſtimmten Entfernungs-Verhältniſſen von dem gegebenen Punkte abſtehen, §. 30.

10. Es ſind zwei unbeſtimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei unbegrenzte Linien gegeben. Man ſoll einen Punkt zwiſchen jenen angeben, deſſen ſenkrechter Abſtand von beiden den gegebenen begrenzten Linien gleich iſt, §. 31.

11. Es ſind zwei unbeſtimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei begrenzte Linien gegeben. Man ſoll einen Punkt auſſerhalb beider Linien beſtimmen, §. 32.

12. Es ſind zwei Linien ihrer Größe und Richtung nach gegeben. Man ſoll einen Punkt angeben, von wo aus ſich mit dieſen beiden Linien zwei gleichſchenklige Dreiecke beſchreiben laſſen, §. 33.

13. Es ſind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man ſoll einen Punkt zwiſchen beiden angeben, von dem aus zwei gegebene Linien mit ihren Endpunkten auf den gegebenen Linien auffallen und zugleich beſtimmte Winkel mit ihnen bilden, §. 34.

14. Es ſind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man ſoll zwiſchen beide eine gegebene Linie ſo legen, daß ſie

mit ihren Endpunkten auf beide Linien falle und mit der einen einen bestimmten Winkel bilde, §. 35.

36. Es sind drei Linien gegeben. Man soll sie an einem Punkte unter solchen Winkeln zusammenstellen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und gleich weit von einander abstehen, §. 36.; oder

37. in einem gegebenen Verhältnisse von einander abstehen, §. 37.

38. Einen Winkel in zwei gleiche Theile theilen, §. 38.

39. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile theilen, §. 39.

40. Einen gegebenen Winkel zu verdoppeln, §. 40.

41. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, zu verdreifachen, §. 31.

42. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, um das Fünffache zu vergrößern, §. 42.

43. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, um die Hälfte zu vergrößern, §. 43.

44. Es ist ein Winkel gegeben. Man soll einen Punkt bestimmen, der mit zwei von ihm aus, auf die Endpunkte der Schenkel des gegebenen Winkels, gezogenen Linien, einen Winkel erzeuge, welcher doppelt so groß, als der gegebene ist, §. 44.

45. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die Linie so zwischen seine Schenkel legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie gleiche Stücke von den Schenkeln abschneide, §. 45.

46. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die gegebene Linie so zwischen seine Schenkel legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie mit dem einen einen gegebenen Winkel bilde, §. 46.

47. Es ist ein Winkel und ein Punkt zwischen seinen Schenkeln gegeben. Man soll eine Linie durch diesen Punkt so zwischen beide Schenkel legen, daß die Zwischenlinie durch diesen Punkt in zwei gleiche Theile getheilt wird, §. 47., oder

48. daß die Zwischenlinie durch diesen Punkt nach einem gegebenen Verhältniß getheilt wird, §. 48.

Es iſt ein Winkel und ein Punkt zwiſchen ſeinen Schenkeln gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels fällen, daß ſie in einem beſtimmten Verhältniſſe ſtehen, und die eine mit dem Schenkel, worauf ſie auffällt, einen beſtimmten Winkel bilde, §. 49.

Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte eine, die beiden Schenkel durchſchneidende, Linie legen, daß die Entfernung zwiſchen dem gegebenen Punkte und dem einen Schenkel, der Zwiſchenlinie zwiſchen beiden Schenkeln gleich ſey, oder in einem gegebenen Verhältniß ſtehe, §. 50.

Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dem gegebenen Punkte eine Linie auf den einen Schenkel, von dieſem eine zweite auf den andern Schenkel fällen, daß beide hiedurch entſtandene Linien in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen, und letztere unter einem gegebenen Winkel auf dem zweiten Schenkel auffalle, §. 51.

Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte zwei Linien auf die beiden Schenkel des Winkels ziehen, daß ſie in einem gegebenen Verhältniſſe unter einander ſtehen und die eine unter einem beſtimmten Winkel auffalle, §. 52.

Es iſt ein Winkel und zwiſchen ſeinen Schenkeln ein Punkt gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt eine Linie ſo legen, daß ſie auf beiden Schenkeln des Winkels gleiche Stücke abſchneide, §. 53.

[illegible] ſind zwei ſehr wenig convergirende, alſo einen ſehr [illegible]en Winkel bildende, Linien und auf einer derſelben [illegible] Punkt gegeben. Man ſoll auf der andern einen Punkt beſtimmen, der eben ſo weit von dem Vereinigungspunkt beider Linien liegt, als der gegebene, §. 54.

[illegible]. [illegible] iſt die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels gegeben. Man ſoll zwiſchen beide Schenkel eine Linie ſo [illegible]en, daß ſie, genugſam verlängert, durch den Vereinigungspunkt beider Schenkel geht, §. 55.

Dieſen einleitenden Bemerkungen zufolge wünſcht der Verfaſſer die vorliegende Sammlung als einen Verſuch, Lehrern und Lernenden nützlich zu ſeyn, beurtheilt zu ſehen. Möge ſie mit eben ſo vielem Intereſſe für die Wiſſenſchaft aufgenommen werden, als ſie mit Liebe für dieſelbe geſchrieben ward.

Noch iſt die Güte meiner Freunde, des Herrn Domänenrathes Regenauer und Herrn Baurathes Dittler in Karlsruhe, zu erwähnen, die mir zu dieſem Werke ſehr ſchätzbare Beiträge lieferten, und von denen mir der Erſtere eine Sammlung von ungefähr 150 — 180 ſchon geordneter Aufgaben und ihre Auflöſungen mittheilte, die ich am gehörigen Orte aufgenommen habe.

Schließlich erlaube ich mir noch, die Literatur anzuzeigen, die mir über geometriſche Aufgaben zu Gebote ſtand, ob ich ſie gleich nach der Anlage des Ganzen nicht immer benutzen konnte. Ich glaube, daß dieſe Mittheilung manchem Leſer angenehm ſeyn wird, zumal man ſich hieraus überzeugen kann, was ſchon früher geleiſtet war und was davon in dieſe Sammlung aufgenommen wurde.

Praktiſche Uebungen für angehende Mathematiker von Dr. E. S. Unger; 2 Bände. Leipzig 1828 und 29.

Der 1te Bend enthält: das Berechnen, Verwandeln und Theilen der Figuren.

Der 2te Band: die Lehre vom Kreiſe mit einer Sammlung von Aufgaben.

L. Maſcheroni's Gebrauch des Zirkels, ins Deutſche überſetzt von J. P. Grüſon, mit einer Sammlung Aufgaben. Berlin 1825.

Lehrbuch der Geometrie für das Geſchäftsleben von G. A. Fiſcher; 2te Auflage. Dresden 1829.

Lehrbuch der Geometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1826.

Sammlung von Beiſpielen, Aufgaben und Lehrſätzen aus der Arithmetik, Algebra, Geometrie und ebenen Trigonometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1820.

Barycentrischer Calcul von A. F. Möbius. Leipzig 1827.
Geometrische Analysis von Joh. Leslie; aus dem Englischen übersetzt von J. P. Grüson. Berlin 1822.
Geometrie der Stellung von Carnot; übersetzt von Schumacher; 2 Bde. Altona 1810.
Lehrbuch der Geometrie von W. A. Förstemann; 2 Bde. Danzig 1827.
System der Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren v. M. S. Grabow. Frankfurt am Main 1828.
Lehrbuch der Geometrie von R. Unruh. München 1824.
Appollonius von Pergä ebene Oerter, wieder hergestellt von R. Simson. Uebersetzt von J. W. Cammerer. Leipzig 1796.
Geometrische Aufgaben von A. Richter; 1ter Theil. Lawsons Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Halberstadt 1829.
Geometrische Aufgaben nach der Methode der Griechen, von Dr. A. W. Diesterweg.
1te Sammlung. Berlin 1825.
2te „ „ Elberfeld 1828.
Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata, wieder hergestellt von R. Simson; nach dem Lateinischen frei bearbeitet von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1822.
Beiträge zur Lehre von den positiven und negativen Größen von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1831.
Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch; 2 Thle. Berlin 1805 und 1807.
Sammlung interessanter geometrischer Lehrsätze und Aufgaben von Fr. Ottemann. Leipzig 1824.
Mathematische Uebungsaufgaben von F. W. D. Snell. Gießen 1810.
Aufgaben über Dreiecke von J. Fr. Kroll. Halle 1826.

73. Von drei Linien, die in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt der Unterſchied zwiſchen der größern und mittlern und zwiſchen der mittlern und kleinern gegeben. Man ſoll die Linien finden, §. 73.

Zweites Kapitel.

Geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.

§. 74 — 113., Pag. 87 — 142.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn die beiden Katheten gegeben ſind, §. 74.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn die Hypotenuſe und eine Kathete gegeben iſt, §. 75.
3. Ein Dreieck bilden, wenn die zwei, einen ſpitzen Winkel eines Dreiecks umſchließenden, Seiten und der Abſchnitt, welchen die, von dem Endpunkte der einen Seite auf die gegenüberſtehende Seite, gefällte Höhe macht, gegeben iſt, §. 76.
4. Ein Dreieck bilden, wenn die zwei, den ſtumpfen Winkel eines Dreiecks umſchließenden, Seiten und die Verlängerung der einen, welche durch die von dem Endpunkte der andern auf jene gefällte Höhe entſteht, gegeben iſt, §. 77.

Man ſoll conſtruiren:

5. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ §. 78.
6. die Formel $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ §. 79.
7. die Formel $x = \frac{a \cdot b}{c}$ §. 80.
8. die Formel $x = \sqrt{a \cdot b}$ §. 81.
9. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ad}$ §. 82.
10. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ad}$ §. 83.
11. die Formel $x = \sqrt{2a^2}$ oder: ein Quadrat zu verdoppeln, §. 84.

12. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{3a^2}$ oder ein Quadrat verdreifachen, §. 85.

Bemerkungen über die Conſtruction ſolcher Formeln, die unter dem Wurzelzeichen große Zahlencoefficienten haben, §. 86 — 88.

13. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, oder die Hälfte eines Quadrates ſuchen, §. 89.

14. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, oder ein Drittel eines Quadrates ſuchen, §. 90.

Bemerkungen über die Conſtruction allgemeiner hierher gehöriger Formeln, §. 90.

Man ſoll conſtruiren:

15. die Formel $x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$ §. 91.

16. die Formel $x = \sqrt{\frac{m}{n}a^2}$ §. 92.

Bemerkungen über die gegebenen Methoden, §. 93.

17. die Formel $x = \sqrt{a^2 + bc}$ §. 94.

18. die Formel $x = a + \sqrt{b^2 - \frac{cde}{f}}$ §. 95.

19. die Formel $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$ §. 96.

20. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2b\sqrt{(c^2 + d^2)}}$ §. 97.

Allgemeine Bemerkungen über die Conſtruction algebraiſcher Formeln, §. 98 — 104.

21. die Formel $\frac{a^3 - b^3}{c}$ §. 101.

22. die Formel $\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}}$ §. 102.

23. die Formel $\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}}$ §. 103.

24. die Formel $\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}}$ §. 104.

Bemerkungen über die verſchiedenen Arten der Auflöſung geometriſcher Aufgaben, §. 105 — 108.

1. Die rein geometriſche.

2. Die analytisch-constructionelle oder auch analytische.
3. Die algebraische Auflösung.
Ihr Wesen und Begriff, §. 105 und 106.
Auffindung der Constructionsarten, §. 107.
Vergleichung der Constructions-Methoden, §. 108.
Bemerkungen über die Ausführung der Construction einer Formel, §. 109 — 113.
Einfache und zusammengesetzte Construction, §. 109.
Ueber die Ausführung der einfachen Construction, §. 110.
Ueber die Ausführung der zusammengesetzten Construction, §. 111.
Erläuterung, §. 112 und 113.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

§. 114 — 182., Pag. 143 — 250.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
1. die Hypotenuse und die Höhe, §. 115.
2. Die beiden Abschnitte, §. 116.
3. Die Höhe und der eine Abschnitt der Hypotenuse, §. 117.
4. Unterschied der beiden Abschnitte und die Höhe, §. 118.
5. Höhe und eine Kathete, §. 119.
6. Ein Abschnitt und die ihm anliegende Kathete, §. 120.
7. Eine Kathete und der an der andern liegende Abschnitt, §. 121.
8. Die kleinere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte, §. 122.
9. Die größere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte, §. 123.
10. Hypotenuse und Summe der beiden Katheten, §. 124.
11. Hypotenuse und Summe der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes, §. 125.
12. Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes, §. 125.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

13. Hypotenuſe und die Summe der Höhe und des kleinern Abſchnittes, §. 127.
14. Hypotenuſe und die Summe der Höhe und des größern Abſchnittes, §. 128.
15. Hypotenuſe und Summe der einen Kathete und des, an der andern liegenden, Abſchnittes, §. 129.
16. Hypotenuſe und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des, an der andern liegenden, Abſchnittes, §. 130.
17. Hypotenuſe und der Unterſchied beider Katheten, §. 131.
18. Hypotenuſe und der Unterſchied der Quadrate der beiden Katheten, §. 132.
19. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen der Höhe und dem größern Abſchnitte, §. 133.
20. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen der Höhe und dem kleinern Abſchnitte, §. 134.
21. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen dem Quadrate der Höhe und des kleinern Abſchnittes, §. 135.
22. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen dem Quadrate der Höhe und des größern Abſchnittes, §. 135.
23. Hypotenuſe und der Ueberſchuß der größern Kathete über den nicht anliegenden Abſchnitt, §. 136.
24. Hypotenuſe und der Ueberſchuß des größern Abſchnittes über die kleinere Kathete und umgekehrt, §. 136.
25. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen den Quadraten der größern Kathete und des nicht anliegenden Abſchnittes, §. 137.
26. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen den Quadraten der kleinern Kathete und des größern Abſchnittes, §. 137.
27. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen der Kathete und dem anliegenden Abſchnitte, §. 138.
28. Eine Kathete und die Summe der Hypotenuſe und andern Kathete, §. 138.
29. Eine Kathete und die Summe des Quadrates der Hypotenuſe und der andern Kathete, §. 140.
30. Eine Kathete und der Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der andern Kathete, §. 141.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

31. Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und Summe der beiden Katheten, §. 142.
32. Hypotenuse und das Summenquadrat der Hypotenuse und einen Kathete, §. 143.
33. Unterschied der Hypotenuse und einen Kathete und die Summe der beiden Katheten, §. 144.
34. Summe der Hypotenuse und der größern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 145.
35. Summe der Hypotenuse und der kleinern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 145.
36. Summe der Hypotenuse und der größern Kathete und der Unterschied der Quadrate beider Katheten, §. 146.
37. Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Quadrate beider Katheten, §. 146.
38. Summe der Quadrate der Hypotenuse und der größern Kathete und der Unterschied der Kathetenquadrate, §. 147.
39. Summe der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Kathetenquadrate, §. 147.
40. Unterschied zwischen der Hypotenuse und größern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 148.
41. Unterschied zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 148.
42. Unterschied des Quadrates der Hypotenuse und größern Kathete und der beiden Kathetenquadrate, §. 149.
43. Unterschied der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete und der zwischen den Kathetenquadraten, §. 150.
44. Summe der Hypotenuse und einen Kathete und die der Hypotenuse und der andern Kathete, §. 151.
45. Summe des Quadrates der Hypotenuse und einen Kathete und die der Hypotenuse und andern Kathete, §. 152.
45. Summe der Hypotenuse und einen Kathete und der Unterschied der Hypotenuse und andern Kathete, §. 153.
47. Summenquadrat der Hypotenuse und einen Kathete und das Unterschiedsquadrat der Hypotenuse und andern Kathete, §. 154.
48. Unterschied der Hypotenuse und einen Kathete und der zwischen der Hypotenuse und andern Kathete, §. 155.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

49. Unterſchied der beiden Abſchnitte und Summe der beiden Katheten, §. 156.
50. Unterſchied dee beiden Abſchnitte und Unterſchied der beiden Katheten, §. 157.
51. Hypotenuſe und ein ſpitzer Winkel, §. 158.
52. Eine Kathete und ein ſpitzer Winkel, §. 159.
53. Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und der von beiden eingeſchloſſene ſpitze Winkel, §. 160.
54. Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und der an der andern Kathete liegende Winkel, §. 161.
55. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und einen Kathete und der an der andern Kathete liegende Winkel, §. 162.
56. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der einen Kathete und der von beiden eingeſchloſſene Winkel, §. 163.
57. Summe der beiden Katheten und ein ſpitzer Winkel, §. 164.
58. Unterſchied zwiſchen beiden Katheten und der an der größern Kathete liegende Winkel, §. 165.
59. Unterſchied zwiſchen beiden Katheten und der an der kleinern Kathete liegende Winkel, §. 166.
60. Umfang und ein ſpitzer Winkel, §. 167.
61. Unterſchied zwiſchen der Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und zwiſchen der andern Kathete und der, an letzterer liegende, ſpitze Winkel, §. 158.
62. Unterſchied zwiſchen der Summe der Hypotenuſe und einen Kathete und zwiſchen der andern Kathete und der letzterer gegenüber liegende Winkel, §. 169.
63. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der Summe der beiden Katheten und der, an der größern Kathete liegende, ſpitze Winkel, §. 170.
64. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der Summe der Kathete und der an der kleinern Kathete liegende Winkel, §. 170.
65. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und zwiſchen der Differenz der beiden Katheten und der an der größern Kathete anliegende Winkel, §. 171.

mit ihren Endpunkten auf beide Linien falle und mit der einen einen bestimmten Winkel bilde, §. 35.

36. Es sind drei Linien gegeben. Man soll sie an einem Punkte unter solchen Winkeln zusammenstellen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und gleich weit von einander abstehen, §. 36.; oder

37. in einem gegebenen Verhältnisse von einander abstehen, §. 37.

38. Einen Winkel in zwei gleiche Theile theilen, §. 38.

39. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile theilen, §. 39.

40. Einen gegebenen Winkel zu verdoppeln, §. 40.

41. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, zu verdreifachen, §. 31.

42. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, um das Fünffache zu vergrößern, §. 42.

43. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, um die Hälfte zu vergrößern, §. 43.

44. Es ist ein Winkel gegeben. Man soll einen Punkt bestimmen, der mit zwei von ihm aus, auf die Endpunkte der Schenkel des gegebenen Winkels, gezogenen Linien, einen Winkel erzeuge, welcher doppelt so groß, als der gegebene ist, §. 44.

45. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die Linie so zwischen seine Schenkel legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie gleiche Stücke von den Schenkeln abschneide, §. 45.

46. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die gegebene Linie so zwischen seine Schenkel legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie mit dem einen einen gegebenen Winkel bilde, §. 46.

47. Es ist ein Winkel und ein Punkt zwischen seinen Schenkeln gegeben. Man soll eine Linie durch diesen Punkt so zwischen beide Schenkel legen, daß die Zwischenlinie durch diesen Punkt in zwei gleiche Theile getheilt wird, §. 47., oder

48. daß die Zwischenlinie durch diesen Punkt nach einem gegebenen Verhältniß getheilt wird, §. 48.

1. Es iſt ein Winkel und ein Punkt zwiſchen ſeinen Schenkeln gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels fällen, daß ſie in einem beſtimmten Verhältniſſe ſtehen, und die eine mit dem Schenkel, worauf ſie auffällt, einen beſtimmten Winkel bilde, §. 49.

2. Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte eine, die beiden Schenkel durchſchneidende, Linie legen, daß die Entfernung zwiſchen dem gegebenen Punkte und dem einen Schenkel, der Zwiſchenlinie zwiſchen beiden Schenkeln gleich ſey, oder in einem gegebenen Verhältniß ſtehe, §. 50.

1. Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dem gegebenen Punkte eine Linie auf den einen Schenkel, von dieſem eine zweite auf den andern Schenkel fällen, daß beide hiedurch entſtandene Linien in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen, und letztere unter einem gegebenen Winkel auf dem zweiten Schenkel auffalle, §. 51.

2. Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte zwei Linien auf die beiden Schenkel des Winkels ziehen, daß ſie in einem gegebenen Verhältniſſe unter einander ſtehen und die eine unter einem beſtimmten Winkel auffalle, §. 52.

3. Es iſt ein Winkel und zwiſchen ſeinen Schenkeln ein Punkt gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt eine Linie ſo legen, daß ſie auf beiden Schenkeln des Winkels gleiche Stücke abſchneide, §. 53.

4. Es ſind zwei ſehr wenig convergirende, alſo einen ſehr ſpitzen Winkel bildende, Linien und auf einer derſelben ein Punkt gegeben. Man ſoll auf der andern einen Punkt beſtimmen, der eben ſo weit von dem Vereinigungspunkt beider Linien liegt, als der gegebene, §. 54.

5. Es iſt die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels gegeben. Man ſoll zwiſchen beide Schenkel eine Linie ſo legen, daß ſie, genugſam verlängert, durch den Vereinigungspunkt beider Schenkel geht, §. 55.

56. Es iſt die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels und ein Punkt zwiſchen beiden gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt eine Linie ſo legen, daß ſie, hinlänglich verlängert, durch den Vereinigungspunkt der Schenkel geht, §. 56.

57. Es iſt die Richtung der zwei Schenkel eines ſehr ſpitzen Winkels und auſſerhalb beider ein Punkt gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt eine Linie ſo legen, daß ſie, hinlänglich verlängert, durch den Vereinigspunkt der beiden Linien geht, §. 57.

58. Es iſt eine Linie und ein Winkel gegeben. Man ſoll über der gegebenen Linie einen Winkel conſtruiren, der dem gegebenen gleich und mit ſeinen Schenkeln auf den Endpunkten der Linie aufſteht, §. 58.

59. Es iſt eine Linie, ein Winkel und ein Schenkel dieſes Winkels gegeben. Man ſoll den gegebenen Winkel über der Linie ſo antragen, daß der Winkel den gegebenen Schenkel enthalte und mit ſeinen Schenkeln auf den Endpunkten der gegebenen Linie aufſteht, §. 59.

60. Es iſt ein Winkel und eine Linie gegeben. Man ſoll die Linie ſo zwiſchen die beiden Schenkel des Winkels antragen, daß ihre Endpunkte in dieſelben fallen und ſie mit einer durch die beiden Endpunkte gelegten geraden Linie parallel läuft, §. 60.

61. Es iſt eine Linie und auſſer ihr ein Punkt gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt eine Linie ſo legen, daß die Summe zweier von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten Perpendikel der gegebenen Linie ſelbſt gleich ſey, §. 61.

62. Es iſt eine Linie und auſſer ihr ein Punkt gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt eine Linie dergeſtalt legen, daß die genannte Summe zwei Drittheile, oder $\frac{n}{m}$ von der gegebenen Linie betrage, §. 62.

63. Es ſind drei Punkte gegeben. Man ſoll einen vierten ſo beſtimmen, daß die von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien beſtimmte Winkel bilden, §. 63.

64. Es ſind drei Punkte gegeben. Man ſoll einen vierten ſo beſtimmen, daß er von jedem der gegebenen gleich weit abſtehe, §. 64.

65. Es iſt eine Linie und auſſer ihr ſind zwei Punkte gegeben. Man ſoll in der Linie einen Punkt beſtimmen, welcher mit der gegebenen Linie und mit beiden Punkten zwei gleiche Winkel bilde, §. 65.

66. Von drei Linien, welche in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt die Summe der beiden äuſſern und die Summe der einen äuſſern und der mittlern gegeben. Man ſoll die Linie finden, §. 66.

67. Von drei Linien, die in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt die mittlere und der Unterſchied zwiſchen den beiden äuſſern gegeben. Man ſoll die beiden äuſſern finden, §. 67.

68. Von drei Linien, die in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt die eine äuſſere und die Summe der mittlern und andern äuſſern gegeben. Man ſoll die mittlere und andere äuſſere finden, §. 68.

69. Von drei Linien, die in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt die eine äuſſere und der Unterſchied zwiſchen der mittlern und andern äuſſern gegeben. Man ſoll die beiden letztern darſtellen, §. 69.

70. Es iſt der Unterſchied zweier Linien und das Verhältniß, worin ſie zu einander ſtehen, gegeben, Man ſoll die beiden Linien finden, §. 70.

71. Es ſind zwei Parallel-Linien und zwiſchen beiden ein Punkt gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt zwiſchen beide Parallelen eine Linie ſo legen, daß der Abſtand des Punktes von der einen um eine beſtimmte Linie größer iſt, als der von der andern, §. 71.

72. Von drei Linien, welche in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, kennt man die Summe, welche die mittlere Proportionale mit den beiden äuſſern bildet. Man ſoll die Linien finden, §. 72.

73. Von drei Linien, die in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt der Unterſchied zwiſchen der größern und mittlern und zwiſchen der mittlern und kleinern gegeben. Man ſoll die Linien finden, §. 73.

Zweites Kapitel.

Geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.

§. 74 — 113., Pag. 87 — 142.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn die beiden Katheten gegeben ſind, §. 74.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn die Hypotenuſe und eine Kathete gegeben iſt, §. 75.
3. Ein Dreieck bilden, wenn die zwei, einen ſpitzen Winkel eines Dreiecks umſchließenden, Seiten und der Abſchnitt, welchen die, von dem Endpunkte der einen Seite auf die gegenüberſtehende Seite, gefällte Höhe macht, gegeben iſt, §. 76.
4. Ein Dreieck bilden, wenn die zwei, den ſtumpfen Winkel eines Dreiecks umſchließenden, Seiten und die Verlängerung der einen, welche durch die von dem Endpunkte der andern auf jene gefällte Höhe entſteht, gegeben iſt, §. 77.

Man ſoll conſtruiren:

5. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ §. 78.
6. die Formel $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ §. 79.
7. die Formel $x = \frac{a \cdot b}{c}$ §. 80.
8. die Formel $x = \sqrt{a \cdot b}$ §. 81.
9. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ad}$ §. 82.
10. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ad}$ §. 83.
11. die Formel $x = \sqrt{2a^2}$ oder: ein Quadrat zu verdoppeln, §. 84.

12. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{3a^2}$ oder ein Quadrat verdreifachen, §. 85.

Bemerkungen über die Conſtruction ſolcher Formeln, die unter dem Wurzelzeichen große Zahlencoefficienten haben, §. 86 — 88.

13. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, oder die Hälfte eines Quadrates ſuchen, §. 89.

14. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, oder ein Drittel eines Quadrates ſuchen, §. 90.

Bemerkungen über die Conſtruction allgemeiner hierher gehöriger Formeln, §. 90.

Man ſoll conſtruiren:

15. die Formal $x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$ §. 91.

16. die Formel $x = \sqrt{\frac{m}{n}n^2}$ §. 92.

Bemerkungen über die gegebenen Methoden, §. 93.

17. die Formel $x = \sqrt{a^2 + bc}$ §. 94.

18. die Formel $x = a + \sqrt{b^2 - \frac{cde}{f}}$ §. 95.

19. die Formel $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$ §. 96.

20. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2b\sqrt{(c^2 + d^2)}}$ §. 97.

Allgemeine Bemerkungen über die Conſtruction algebraiſcher Formeln, §. 98 — 104.

21. die Formel $\frac{a^3 - b^3}{c}$ §. 101.

22. die Formel $\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}}$ §. 102.

23. die Formel $\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}}$ §. 103.

24. die Formel $\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}}$ §. 104.

Bemerkungen über die verſchiedenen Arten der Auflöſung geometriſcher Aufgaben, §. 105 — 108.

1. Die rein geometriſche.

2. Die analytisch-constructionelle oder auch analytische.
3. Die algebraische Auflösung.
Ihr Wesen und Begriff, §. 105 und 106.
Auffindung der Constructionsarten, §. 107.
Vergleichung der Constructions-Methoden, §. 108.
Bemerkungen über die Ausführung der Construction einer Formel, §. 109 — 113.
Einfache und zusammengesetzte Construction, §. 109.
Ueber die Ausführung der einfachen Construction, §. 110.
Ueber die Ausführung der zusammengesetzten Construction, §. 111.
Erläuterung, §. 112 und 113.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

§. 114 — 182., Pag. 143 — 250.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
1. die Hypotenuse und die Höhe, §. 115.
2. Die beiden Abschnitte, §. 116.
3. Die Höhe und der eine Abschnitt der Hypotenuse, §. 117.
4. Unterschied der beiden Abschnitte und die Höhe, §. 118.
5. Höhe und eine Kathete, §. 119.
6. Ein Abschnitt und die ihm anliegende Kathete, §. 120.
7. Eine Kathete und der an der andern liegende Abschnitt, §. 121.
8. Die kleinere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte, §. 122.
9. Die größere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte, §. 123.
10. Hypotenuse und Summe der beiden Katheten, §. 124.
11. Hypotenuse und Summe der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes, §. 125.
12. Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes, §. 125.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

13. Hypotenuſe und die Summe der Höhe und des kleinern Abſchnittes, §. 127.
14. Hypotenuſe und die Summe der Höhe und des größern Abſchnittes, §. 128.
15. Hypotenuſe und Summe der einen Kathete und des, an der andern liegenden, Abſchnittes, §. 129.
16. Hypotenuſe und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des, an der andern liegenden, Abſchnittes, §. 130.
17. Hypotenuſe und der Unterſchied beider Katheten, §. 131.
18. Hypotenuſe und der Unterſchied der Quadrate der beiden Katheten, §. 132.
19. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen der Höhe und dem größern Abſchnitte, §. 133.
20. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen der Höhe und dem kleinern Abſchnitte, §. 134.
21. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen dem Quadrate der Höhe und des kleinern Abſchnittes, §. 135.
22. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen dem Quadrate der Höhe und des größern Abſchnittes, §. 135.
23. Hypotenuſe und der Ueberſchuß der größern Kathete über den nicht anliegenden Abſchnitt, §. 136.
24. Hypotenuſe und der Ueberſchuß des größern Abſchnittes über die kleinere Kathete und umgekehrt, §. 136.
25. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen den Quadraten der größern Kathete und des nicht anliegenden Abſchnittes, §. 137.
26. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen den Quadraten der kleinern Kathete und des größern Abſchnittes, §. 137.
27. Hypotenuſe und der Unterſchied zwiſchen der Kathete und dem anliegenden Abſchnitte, §. 138.
28. Eine Kathete und die Summe der Hypotenuſe und andern Kathete, §. 138.
29. Eine Kathete und die Summe des Quadrates der Hypotenuſe und der andern Kathete, §. 140.
30. Eine Kathete und der Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der andern Kathete, §. 141.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

31. Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und Summe der beiden Katheten, §. 142.
32. Hypotenuſe und das Summenquadrat der Hypotenuſe und einen Kathete, §. 143.
33. Unterſchied der Hypotenuſe und einen Kathete und die Summe der beiden Katheten, §. 144.
34. Summe der Hypotenuſe und der größern Kathete und der Unterſchied zwiſchen beiden Katheten, §. 145.
35. Summe der Hypotenuſe und der kleinern Kathete und der Unterſchied zwiſchen beiden Katheten, §. 145.
36. Summe der Hypotenuſe und der größern Kathete und der Unterſchied der Quadrate beider Katheten, §. 146.
37. Summe der Hypotenuſe und kleinern Kathete und der Unterſchied der Quadrate beider Katheten, §. 146.
38. Summe der Quadrate der Hypotenuſe und der größern Kathete und der Unterſchied der Kathetenquadrate, §. 147.
39. Summe der Quadrate der Hypotenuſe und kleinern Kathete und der Unterſchied der Kathetenquadrate, §. 147.
40. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und größern Kathete und der Unterſchied zwiſchen beiden Katheten, §. 148.
41. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und kleinern Kathete und der Unterſchied zwiſchen beiden Katheten, §. 148.
42. Unterſchied des Quadrates der Hypotenuſe und größern Kathete und der beiden Kathetenquadrate, §. 149.
43. Unterſchied der Quadrate der Hypotenuſe und kleinern Kathete und der zwiſchen den Kathetenquadraten, §. 150.
44. Summe der Hypotenuſe und einen Kathete und die der Hypotenuſe und der andern Kathete, §. 151.
45. Summe des Quadrates der Hypotenuſe und einen Kathete und die der Hypotenuſe und andern Kathete, §. 152.
45. Summe der Hypotenuſe und einen Kathete und der Unterſchied der Hypotenuſe und andern Kathete, §. 153.
47. Summenquadrat der Hypotenuſe und einen Kathete und das Unterſchiedsquadrat der Hypotenuſe und andern Kathete, §. 154.
48. Unterſchied der Hypotenuſe und einen Kathete und der zwiſchen der Hypotenuſe und andern Kathete, §. 155.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

49. Unterſchied der beiden Abſchnitte und Summe der beiden Katheten, §. 156.

50. Unterſchied der beiden Abſchnitte und Unterſchied der beiden Katheten, §. 157.

51. Hypotenuſe und ein ſpitzer Winkel, §. 158.

52. Eine Kathete und ein ſpitzer Winkel, §. 159.

53. Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und der von beiden eingeſchloſſene ſpitze Winkel, §. 160.

54. Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und der an der andern Kathete liegende Winkel, §. 161.

55. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und einen Kathete und der an der andern Kathete liegende Winkel, §. 162.

56. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der einen Kathete und der von beiden eingeſchloſſene Winkel, §. 163.

57. Summe der beiden Katheten und ein ſpitzer Winkel, §. 164.

58. Unterſchied zwiſchen beiden Katheten und der an der größern Kathete liegende Winkel, §. 165.

59. Unterſchied zwiſchen beiden Katheten und der an der kleinern Kathete liegende Winkel, §. 166.

60. Umfang und ein ſpitzer Winkel, §. 167.

61. Unterſchied zwiſchen der Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete und zwiſchen der andern Kathete und der, an letzterer liegende, ſpitze Winkel, §. 158.

62. Unterſchied zwiſchen der Summe der Hypotenuſe und einen Kathete und zwiſchen der andern Kathete und der letzterer gegenüber liegende Winkel, §. 169.

63. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der Summe der beiden Katheten und der, an der größern Kathete liegende, ſpitze Winkel, §. 170.

64. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und der Summe der Kathete und der an der kleinern Kathete liegende Winkel, §. 170.

65. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und zwiſchen der Differenz der beiden Katheten und der an der größern Kathete anliegende Winkel, §. 171.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

66. Unterſchied zwiſchen der Hypotenuſe und zwiſchen der Differenz der Katheten und der, an der kleinern Kathete liegende, Winkel, §. 172.
67. Hypotenuſe und das Verhältniß, worin die Höhe zur größern Kathete ſteht, §. 173.
68. Hypotenuſe und das Verhältniß, worin die Höhe zur kleinern Kathete ſteht, §. 174.
69. Hypotenuſe und das Verhältniß, worin die Quadrate der beiden Katheten ſtehen ſollen, §. 175.
70. Hypotenuſe und wenn verlangt wird, daß die Quadrate der Katheten und Hypotenuſe zu einander in einer arithmetiſchen Proportion ſtehen ſollen, §. 176.
71. Hypotenuſe und wenn verlangt wird, daß die Quadrate der Katheten und Hypotenuſe in einer geometriſchen Proportion ſtehen ſollen, §. 177.
72. Höhe und das Verhältniß zwiſchen beiden Katheten, §. 178.
73. Hypotenuſe und das Verhältniß zwiſchen beiden Katheten, §. 179.
74. Umfang und die Höhe, §. 180.
75. Summe der beiden Katheten und Flächeninhalt, §. 181.
76. Umfang und Flächeninhalt, §. 182.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichſchenklige und gleichſeitige Dreieck.

§. 183 — 232., Pag. 251 — 296.

A. Aufgaben über das gleichſchenklige Dreieck, von §. 183 — 214.

Ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

1. die Grundlinie und Höhe, §. 183.
2. Schenkel und Höhe, §. 184.
3. Grundlinie und der ihr anliegende Winkel, §. 185.
4. Schenkel und der zwiſchen ihm und der Grundlinie liegende Winkel, §. 186.

Ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

5. der Schenkel und der Scheitelwinkel, §. 187.
6. Grundlinie und Scheitelwinkel, §. 188.
7. Höhe und Winkel an der Grunklinie, §. 189.
8. Scheitelwinkel und Höhe, §. 190.
9. Höhe und Summe des Schenkels und der Grundlinie, §. 191.
10. Höhe und Ueberſchuß des Schenkels über der Grundlinie, §. 192.
11. Höhe und Ueberſchuß der Grundlinie über dem Schenkel, §. 192.
12. Grundlinie und die Summe der Höhe und des Schenkels, §. 193.
13. Grundlinie und Ueberſchuß des Schenkels und der Höhe, §. 194.
14. Schenkel und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 195.
15. Schenkel und der Ueberſchuß der Höhe über die Grundlinie, §. 196.
16. Schenkel und Ueberſchuß der Grundlinie über die Höhe, §. 196. in der Anmerkung Seite XXXII.
17. Scheitelwinkel und die Summe des Schenkels und der Grundlinie, §. 197.
18. Scheitelwinkel und Ueberſchuß des Schenkels über die Grundlinie, §. 198.
19. Scheitelwinkel und Ueberſchuß der Grundlinie über den Schenkel, §. 199.
20. Scheitelwinkel und Summe des Schenkels und der Höhe, §. 200.
21. Scheitelwinkel und Unterſchied zwiſchen dem Schenkel und der Höhe, §. 201.
22. Scheitelwinkel und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 202.
23. Scheitelwinkel und der Ueberſchuß der Höhe über die Grundlinie, §. 203.
24. Schenkel und Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 204.
25. Schenkel und Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 205.

Ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

26. Höhe und die Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 206.
27. Summe der Höhe und Grundlinie und die der Höhe und des Schenkels, §. 207.
28. Unterſchied zwiſchen der Höhe und dem Schenkel und der Ueberſchuß der Höhe über die Grundlinie, §. 208.
29. Umfang und Höhe, §. 209.
30. Inhalt und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 210.
31. Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe, §. 211.
32. Schenkel und die ihm zugehörige Höhe, §. 212.
33. Schenkel und wenn der Winkel an der Grundlinie doppelt ſo groß, als der an der Spitze werden ſoll, §. 213.
34. Grundlinie und wenn der Winkel an der Grundlinie doppelt ſo groß, als der Scheitelwinkel werden ſoll, §. 214.

B. Aufgaben über das rechtwinklig-gleichſchenklige Dreieck.

§. 215 — 228., Pag. 278 — 292.

Ein rechtwinklig-gleichſchenklig Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

1. Die Hypotenuſe, §. 216.
2. Die eine Kathete, §. 216.
3. Die Höhe, §. 216.
4. Der eine Abſchnitt der Hypotenuſe, §. 216.
5. Die Summe der Hypotenuſe und der Kathete, §. 217.
6. Die Summe des Quadrates der Hypotenuſe und Kathete, §. 218.
7. Ueberſchuß der Hypotenuſe über die Kathete, §. 319.
8. Summe der Hypotenuſe und Höhe, §. 220.
9. Summe des Quadrates der Hypotenuſe und Höhe, §. 221.
10. Unterſchied der Quadrate zwiſchen der Hypotenuſe und Höhe, 222.
11. Summe der einen Kathete und Höhe, §. 223.
12. Summe der einen Kathete und der Höhe, §. 224.
13. Unterſchied zwiſchen der Höhe und Kathete, §. 225.

Ein rechtwinklig-gleichſchenklig Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

14. Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, §. 226.
15. Umfang, §. 227.
16. Summe der Quadrate der Umfangslinien, §. 228.

C. Aufgaben über das gleichſeitige Dreieck.

§. 229 — 232., Pag. 293 — 296.

Ein gleichſeitiges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

1. Die Höhe, §. 229.
2. Die Summe der Höhe und Seite, §. 230.
3. Unterſchied zwiſchen der Höhe und Seite, §. 231.
4. Flächeninhalt, §. 232.

Berichtigungen zur erſten Abtheilung.

Seite 48 Zeile 3 von oben leſe Fig. 54. ſtatt 52.
— 64 — 18 v. o. l. erhabene ſt. hohle.
— 69 — 3 v. o. l. Aufgabe ſt. Aufggbe.
— 159 — 14 v. u. l. $\sqrt{2H^2 - S^2}$ ſt. $\sqrt{2H^2 S - 2}$
— 174 — 15 v. u. l. $\sqrt{H^2 - S^2} = \sqrt{(H + S)(H - S)}$
ſt. $\sqrt{\frac{1}{2}H^2 - H\sqrt{(S^2 - \frac{1}{4}H^2)}}$
— 189 — 8 v. o. l. Analyſis ſt. Aalyſis.
— 247 — 16 v. u. l. Kathete ſt. Kakhete.
— 250 — 11 v. o. l. Lehrſatz ſt. Lehrſatz.
— 262 — 16 v. o. l. $x + d = \frac{1}{2}d + \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - d^2}$
ſt. $x + d - \frac{1}{2}d + \frac{3}{2}\sqrt{5k^2 - d^2}$
— 262 — 11 v. u. l. $\alpha = BAC$ ſt. $x = BAC$.
— 273 — 9 v. o. l. $x = \frac{1}{2}S$ ſt. $x = \frac{1}{4}S$.
— 291 — 13 v. u. l. einſchließenden ſt. einſchließenden.

Nachträgliche Anmerkungen zur erſten Abtheilung.

Anmerkung zu §. 66. Berührt die Linie BD den Bogen ADC, ſo iſt nur ein Punkt möglich, wo dieß geſchehen kann, und folglich auch nur eine Auflöſung für den vorgelegten Fall. Durchſchneidet aber BD den Bogen ADC, ſo ſind zwei Durchſchnittspunkte D und D′ möglich, folglich auch, wie leicht erhellt, zwei Auflöſungen, und man hat folgende zwei Proportionen:

$$AE : ED = ED : EC$$

und

$$AE' : E'D' = E'D' : E'C$$

In dieſem Falle iſt alſo die Aufgabe unbeſtimmt.

Anmerkung zu §. 196. Durch eine ähnliche Analyſis löst ſich die Aufgabe: ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn der Schenkel und Ueberſchuß der Grundlinie über die Höhe gegeben iſt.

Anmerkung zu §. 212. Die beiden gegebenen Auflöſungen gelten für ein gleichſchenkliges Dreieck, deſſen Scheitelwinkel ſpitz iſt. Zieht man durch die Punkte F und A, wie vorhin die Linie FA und macht AB′ = AC und zieht BC, ſo entſteht das Dreieck AB′C, welches den gegebenen Schenkel und die gegebene Höhe FC = BE hat, und alſo die Bedingungen der Aufgabe gleichfalls erfüllt und ſich von ABC nur dadurch unterſcheidet, daß ſein Scheitelwinkel ſtumpf iſt. Hieraus folgt, daß die Aufgabe unbeſtimmt iſt, wenn nicht bemerkt wird, ob das Dreieck ſpitz- oder ſtumpfwinklig ſeyn ſoll.

Die beiden Scheitelwinkel ergänzen ſich, wie leicht erhellt, zu 180°. Da BA = AB′, ſo iſt auch

$$\tfrac{1}{2}AB \,.\, FC = \tfrac{1}{2}AB' \,.\, FC$$

und folglich iſt der Inhalt zweier gleichſchenkligen Dreiecke, die gleiche Schenkel und Scheitelhöhen haben und deren Scheitelwinkel ſich zu 180° ergänzen, einander gleich.

Die mitgetheilten Gleichungen gehen für ein ſtumpfwinkliges gleichſchenkliges Dreieck in folgende über

für die Grundlinie

$$x = \sqrt{2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}}$$

für die Höhe

$$y = \frac{hk}{x} = \frac{hk}{\sqrt{[2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}]}}$$

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1.

Aufgabe. Aus drei Linien, wovon je zwei immer größer als die dritte ſind, ein Dreieck zu bilden. Fig. 1.

Auflöſung. Die gegebenen Linien ſeyen AB, AC, BC. Man betrachte die Linie AB als Grundlinie, beſchreibe von dem einen Endpunkte B derſelben mit der Linie BC einen Kreisbogen rCt, ebenſo von dem andern Endpunkte A mit der Linie AC einen, den vorigen durchſchneidenden, Kreisbogen pCq, ziehe von dem Durchſchnittspunkte C der beiden Kreisbogen C die Linie CA und CB auf die Endpunkte der Linie AB, ſo iſt das Dreieck ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AB iſt vermöge der Conſtruction der Linie AB gleich, ebenſo iſt jede Linie, welche von dem Endpunkte A auf irgend einen Punkt des Kreisbogens pq gezogen wird, der Linie AC, und jede, welche von B auf irgend einen Punkt des Kreisbogens rt gezogen wird, der Linie BC gleich. Der Durchſchnittspunkt C iſt daher der Vereinigungspunkt für die, den gegebenen gleichen Linien AC und BC. Die drei Linien ſind alſo ſo mit einander verbunden, daß ſie ein Dreieck bilden.

Anmerkung. So wie die Linie AB als Grundlinie angenommen wurde, ſo hätte auch jede andere als Grundlinie angenommen werden können, wodurch ein Dreieck von einer andern Lage, aber nicht von verſchiedener Geſtalt oder Größe entſtanden wäre. Ebenſo hätte umgekehrt die Linie BC an den Endpunkt A, und die

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
66. Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der Katheten und der, an der kleinern Kathete liegende, Winkel, §. 172.
67. Hypotenuse und das Verhältniß, worin die Höhe zur größern Kathete steht, §. 173.
68. Hypotenuse und das Verhältniß, worin die Höhe zur kleinern Kathete steht, §. 174.
69. Hypotenuse und das Verhältniß, worin die Quadrate der beiden Katheten stehen sollen, §. 175.
70. Hypotenuse und wenn verlangt wird, daß die Quadrate der Katheten und Hypotenuse zu einandee in einer arithmetischen Proportion stehen sollen, §. 176.
71. Hypotenuse und wenn verlangt wird, daß die Quadrate der Katheten und Hypotenuse in einer geometrischen Proportion stehen sollen, §. 177.
72. Höhe und das Verhältniß zwischen beiden Katheten, §. 178.
73. Hypotenuse und das Verhältniß zwischen beiden Katheten, §. 179.
74. Umfang und die Höhe, §. 180.
75. Summe der beiden Katheten und Flächeninhalt, §. 181.
76. Umfang und Flächeninhalt, §. 182.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.

§. 183 — 232., Pag. 251 — 296.

A. Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck, von §. 183 — 214.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
1. die Grundlinie und Höhe, §. 183.
2. Schenkel und Höhe, §. 184.
3. Grundlinie und der ihr anliegende Winkel, §. 185.
4. Schenkel und der zwischen ihm und der Grundlinie liegende Winkel, §. 186.

Ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

5. der Schenkel und der Scheitelwinkel, §. 187.
6. Grundlinie und Scheitelwinkel, §. 188.
7. Höhe und Winkel an der Grunklinie, §. 189.
8. Scheitelwinkel und Höhe, §. 190.
9. Höhe und Summe des Schenkels und der Grundlinie, §. 191.
10. Höhe und Ueberſchuß des Schenkels über der Grundlinie, §. 192.
11. Höhe und Ueberſchuß der Grundlinie über dem Schenkel, §. 192.
12. Grundlinie und die Summe der Höhe und des Schenkels, §. 193.
13. Grundlinie und Ueberſchuß des Schenkels und der Höhe, §. 194.
14. Schenkel und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 195.
15. Schenkel und der Ueberſchuß der Höhe über die Grundlinie, §. 196.
16. Schenkel und Ueberſchuß der Grundlinie über die Höhe, §. 196. in der Anmerkung Seite XXXII.
17. Scheitelwinkel und die Summe des Schenkels und der Grundlinie, §. 197.
18. Scheitelwinkel und Ueberſchuß des Schenkels über die Grundlinie, §. 198.
19. Scheitelwinkel und Ueberſchuß der Grundlinie über den Schenkel, §. 199.
20. Scheitelwinkel und Summe des Schenkels und der Höhe, §. 200.
21. Scheitelwinkel und Unterſchied zwiſchen dem Schenkel und der Höhe, §. 201.
22. Scheitelwinkel und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 202.
23. Scheitelwinkel und der Ueberſchuß der Höhe über die Grundlinie, §. 203.
24. Schenkel und Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 204.
25. Schenkel und Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 205.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

26. Höhe und die Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 206.
27. Summe der Höhe und Grundlinie und die der Höhe und des Schenkels, §. 207.
28. Unterschied zwischen der Höhe und dem Schenkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie, §. 208.
29. Umfang und Höhe, §. 209.
30. Inhalt und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 210.
31. Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe, §. 211.
32. Schenkel und die ihm zugehörige Höhe, §. 212.
33. Schenkel und wenn der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der an der Spitze werden soll, §. 213.
34. Grundlinie und wenn der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Scheitelwinkel werden soll, §. 214.

B. Aufgaben über das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

§. 215 — 228., Pag. 278 — 292.

Ein rechtwinklig-gleichschenklig Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

1. Die Hypotenuse, §. 216.
2. Die eine Kathete, §. 216.
3. Die Höhe, §. 216.
4. Der eine Abschnitt der Hypotenuse, §. 216.
5. Die Summe der Hypotenuse und der Kathete, §. 217.
6. Die Summe des Quadrates der Hypotenuse und Kathete, §. 218.
7. Ueberschuß der Hypotenuse über die Kathete, §. 319.
8. Summe der Hypotenuse und Höhe, §. 220.
9. Summe des Quadrates der Hypotenuse und Höhe, §. 221.
10. Unterschied der Quadrate zwischen der Hypotenuse und Höhe, 222.
11. Summe der einen Kathete und Höhe, §. 223.
12. Summe der einen Kathete und der Höhe, §. 224.
13. Unterschied zwischen der Höhe und Kathete, §. 225.

Ein rechtwinklig-gleichſchenklig Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

14. Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, §. 226.
15. Umfang, §. 227.
16. Summe der Quadrate der Umfangslinien, §. 228.

C. Aufgaben über das gleichſeitige Dreieck.

§. 229 — 232., Pag. 293 — 296.

Ein gleichſeitiges Dreieck zu bilden, wenn gegeben iſt:

1. Die Höhe, §. 229.
2. Die Summe der Höhe und Seite, §. 230.
3. Unterſchied zwiſchen der Höhe und Seite, §. 231.
4. Flächeninhalt, §. 232.

Berichtigungen zur erſten Abtheilung.

Seite 48 Zeile 3 von oben leſe Fig. 54. ſtatt 52.
— 64 — 18 v. o. l. erhabene ſt. hohle.
— 69 — 3 v. o. l. Aufgabe ſt. Aufggbe.
— 159 — 14 v. u. l. $\sqrt{2H^2 - S^2}$ ſt. $\sqrt{2H^2 S - 2}$
— 174 — 15 v. u. l. $\sqrt{H^2 - S^2} = \sqrt{(H + S)(H - S)}$
ſt. $\sqrt{\frac{1}{2}H^2 - H\sqrt{(S^2 - \frac{1}{4}H^2)}}$
— 189 — 8 v. o. l. Analyſis ſt. Aalyſis.
— 247 — 16 v. u. l. Kathete ſt. Kakhete.
— 250 — 11 v. o. l. Lehrſatz ſt. Lehrſatz.
— 262 — 16 v. o. l. $x + d = \frac{1}{2}d + \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - d^2}$
ſt. $x + d - \frac{1}{2}d + \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - d^2}$
— 262 — 11 v. u. l. $\alpha = BAC$ ſt. $x = BAC$.
— 273 — 9 v. o. l. $x = \frac{1}{2}S$ ſt. $x = \frac{1}{4}S$.
— 291 — 13 v. u. l. einſchließenden ſt. einlchließenden.

Nachträgliche Anmerkungen zur erſten Abtheilung.

Anmerkung zu §. 66. Berührt die Linie BD den Bogen ADC, ſo iſt nur ein Punkt möglich, wo dieß geſchehen kann, und folglich auch nur eine Auflöſung für den vorgelegten Fall. Durchſchneidet aber BD den Bogen ADC, ſo ſind zwei Durchſchnittspunkte D und D′ möglich, folglich auch, wie leicht erhellt, zwei Auflöſungen, und man hat folgende zwei Proportionen:

$$AE : ED = ED : EC$$

und

$$AE' : E'D' = E'D' : E'C$$

In dieſem Falle iſt alſo die Aufgabe unbeſtimmt.

Anmerkung zu §. 196. Durch eine ähnliche Analyſis löst ſich die Aufgabe: ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn der Schenkel und Ueberſchuß der Grundlinie über die Höhe gegeben iſt.

Anmerkung zu §. 212. Die beiden gegebenen Auflöſungen gelten für ein gleichſchenkliges Dreieck, deſſen Scheitelwinkel ſpitz iſt. Zieht man durch die Punkte F und A, wie vorhin die Linie FA und macht AB′ = AC und zieht BC, ſo entſteht das Dreieck AB′C, welches den gegebenen Schenkel und die gegebene Höhe FC = BE hat, und alſo die Bedingungen der Aufgabe gleichfalls erfüllt und ſich von ABC nur dadurch unterſcheidet, daß ſein Scheitelwinkel ſtumpf iſt. Hieraus folgt, daß die Aufgabe unbeſtimmt iſt, wenn nicht bemerkt wird, ob das Dreieck ſpitz- oder ſtumpfwinklig ſeyn ſoll.

Die beiden Scheitelwinkel ergänzen ſich, wie leicht erhellt, zu 180°. Da BA = AB′, ſo iſt auch

$$\tfrac{1}{2}AB \,.\, FC = \tfrac{1}{2}AB' \,.\, FC$$

und folglich iſt der Inhalt zweier gleichſchenkligen Dreiecke, die gleiche Schenkel und Scheitelhöhen haben und deren Scheitelwinkel ſich zu 180° ergänzen, einander gleich.

Die mitgetheilten Gleichungen gehen für ein ſtumpfwinkliges gleichſchenkliges Dreieck in folgende über

für die Grundlinie

$$x = \sqrt{2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}}$$

für die Höhe

$$y = \frac{hk}{x} = \frac{hk}{\sqrt{[2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}]}}$$

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1.

Aufgabe. Aus drei Linien, wovon je zwei immer gröſſer als die dritte ſind, ein Dreieck zu bilden. Fig. 1.

Auflöſung. Die gegebenen Linien ſeyen AB, AC, BC. Man betrachte die Linie AB als Grundlinie, beſchreibe von dem einen Endpunkte B derſelben mit der Linie BC einen Kreisbogen rCt, ebenſo von dem andern Endpunkte A mit der Linie AC einen, den vorigen durchſchneidenden, Kreisbogen pCq, ziehe von dem Durchſchnittspunkte C der beiden Kreisbogen C die Linie CA und CB auf die Endpunkte der Linie AB, ſo iſt das Dreieck ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AB iſt vermöge der Conſtruction der Linie AB gleich, ebenſo iſt jede Linie, welche von dem Endpunkte A auf irgend einen Punkt des Kreisbogens pq gezogen wird, der Linie AC, und jede, welche von B auf irgend einen Punkt des Kreisbogens rt gezogen wird, der Linie BC gleich. Der Durchſchnittspunkt C iſt daher der Vereinigungspunkt für die, den gegebenen gleichen Linien AC und BC. Die drei Linien ſind alſo ſo mit einander verbunden, daß ſie ein Dreieck bilden.

Anmerkung. So wie die Linie AB als Grundlinie angenommen wurde, ſo hätte auch jede andere als Grundlinie angenommen werden können, wodurch ein Dreieck von einer andern Lage, aber nicht von verſchiedener Geſtalt oder Gröſſe entſtanden wäre. Ebenſo hätte umgekehrt die Linie BC an den Endpunkt A, und die

Linie AC an den Endpunkt B der Grundlinie AB gesetzt werden können, ohne daß ein von dem erzeugten verschiedenes Dreieck entstanden wäre. Hieraus ergibt sich also, daß die Verbindung, in welcher die drei Linien unter einander angereiht werden, ganz gleichgültig ist, und daß aus drei Linien wohl mehrere Dreiecke gebildet werden können, die der Lage und Stellung nach unter einander verschieden sind, in Wahrheit aber immer ein und dasselbe Dreieck dargestellt wird, und daß sich also aus drei Linien nur ein mögliches Dreieck bilden läßt.

Die nämliche Bemerkung gilt noch immer, wenn eine Linie, worauf, oder ein Punkt, woran ein schon gegebenes Dreieck getragen werden soll, gegeben ist, oder wenn die drei gegebenen Linien selbst ein Dreieck bilden. Die Aufgabe kann leicht nach dem Gesagten gelöst werden.

§. 2.

Aufgabe. Aus zwei ungleichen Linien ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden. Fig. 2.

Auflösung. Die Linien seyen AB und AC. Man beschreibe von den Endpunkten A und C der als Grundlinie angenommenen Linie AC, mit der Linie AB zwei sich durchschneidende Kreisbogen und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte B die Linien AB und BC auf die Endpunkte der Grundlinie AC, so ist das Dreieck ABC das gesuchte.

Beweis. Da von den Endpunkten A und C der Linie AC mit der Linie AB zwei sich durchschneidende Kreisbogen gezogen wurden, so sind alle Linien, die von diesen Punkten auf jene Bogen gezogen werden, sich und der Linie AB gleich, also auch die in dem Punkte B sich vereinigenden Linien AB und BC, und es ist also das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck, das die eine Linie als Grundlinie und die andere als Schenkel hat.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange unbestimmt, als nicht angegeben ist, welche von den gegebenen Linien die Grundlinie und welche die gleichen Schenkel bilden soll, denn alsdann entstehen zwei Dreiecke, welche nicht nur der Lage, sondern auch der Gestalt nach von einander verschieden sind.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Schenkel-Linie größer, als die Hälfte der Grundlinie ist. Sie ist möglich, wenn letztere kleiner als die Schenkel-Linie ist. Aus zwei ungleich-großen Linien ist also immer wenigstens ein gleichschenkliges Dreieck möglich.

§. 3.

Aufgabe. Es iſt eine Linie gegeben. Man ſoll ein gleichſeitiges Dreieck aus ihr bilden. Fig. 3.

Auflöſung. Die gegebene Linie ſey AC. Man beſchreibe von den beiden Endpunkten der Linie AC mit ihr ſelbſt zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen, und ziehe von ihrem Durchſchnittspunkte B zwei Linien auf die Endpunkte der Linie AC, ſo entſteht das Dreieck ABC, worin die drei Linien einander gleich ſind.

§. 4.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel an einen beſtimmten Punkt anzutragen. Fig. 4.

Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC. Der Punkt M. Man ſchneide von den Schenkeln des Winkels zwei beliebig große Stücke AD, AF ab, und verbinde die Punkte D und F durch eine gerade Linie, wodurch das Dreieck ADF entſteht. Nun lege man in irgend einer Richtung durch den Punkt M eine gerade Linie und trage einen der beiden Schenkel AD = MD an denſelben, und vollende mit den beiden andern Linien AD und DF nach §. 1. das Dreieck MDF, ſo iſt der gegebene Winkel DAF an den Punkt M angetragen.

Beweis. Durch die angegebene Conſtruction iſt ein dem Dreieck ADF congruentes Dreieck MDF über der Linie MD entſtanden und alſo die Linie DF in beiden einander gleich. Da nun in congruenten Dreiecken gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber ſtehen, ſo iſt der Winkel DMF dem Winkel BAC gleich.

Anmerkung. In der angegebenen Conſtruction iſt die Richtung der durch den Punkt M gelegten Linie MD willkührlich angenommen worden. Das Verfahren bleibt daſſelbe, wenn auch die Richtung dieſer Linie beſtimmt, oder ein gegebener Winkel an einen beſtimmten Punkt in einer Linie anzulegen iſt.

§. 5.

Aufgabe. Eine oder mehrere Linien mit einer gegebenen durch einen oder mehrere beſtimmte Punkte parallel zu ziehen.

Es werde zuerſt der Fall betrachtet, wenn nur eine Linie

durch einen beſtimmten Punkt mit einer gegebenen parallel gezogen werden ſoll.

Erſte Auflöſung Fig. 5. Man ziehe durch den gegebenen Punkt M in beliebiger Richtung eine Linie DF, daß ſie die gegebene Linie AB durchſchneide, ſo entſtehen über der Linie AB zwei Winkel x, y, von dieſen trage man einen, den Winkel y, an den Punkt M auf die entgegengeſetzte Seite der durchſchneidenden Linie, in der Richtung gegen F, daß der eine Schenkel des angetragenen Winkels y' in die Linie DF fällt, ſo gibt der andere Schenkel MK des Winkels y die Richtung der, mit der gegebenen Linie AB parallel zu ziehenden Linie an.

Zweite Auflöſung Fig. 6. Man trage einen der beiden unter der gegebenen Linie liegenden Winkel z an den Punkt M auf der nämlichen Seite der durchſchneidenden Linie DF in der Richtung von D nach F an, daß der eine Schenkel des angetragenen Winkels in die Linie DF falle, ſo läuft der andere Schenkel MK des angetragenen Winkels mit der gegebenen Linie AB parallel.

Dritte Auflöſung Fig. 7. Man ziehe, wie vorhin, eine Linie DF durch den Punkt M, daß ſie die gegebene Linie durchſchneidet, ſchneide von dem Durchſchnitspunkte N der beiden Linien aus auf der Linie AB irgend ein Stück NP ab, und beſchreibe von dem Punkte M aus auf derſelben Seite der Durchſchnitts-Linie DF mit der Linie NP einen hinlänglich großen Kreisbogen, ferner beſchreibe man mit der, zwiſchen dem gegebenen Punkte M und dem Durchſchnittspunkte N liegenden Linie MN von dem Punkt P aus einen den vorigen durchſchneidenden Kreisbogen, ſo gibt die gerade Linie zwiſchen dieſem Durchſchnittspunkte Q und dem gegebenen Punkte M die Richtung der mit AB parallel gehenden Linie QH an.

Beweis zur erſten Auflöſung. Da der Winkel x oder y auf der entgegengeſetzten Seite der durchſchneidenden Linie in der Richtung von D nach F an den Punkt M angetragen iſt, ſo werden durch dieſe Conſtruction zwei gleiche Winkel erzeugt, welche zwiſchen zwei Linien auf der entgegengeſetzten Seite einer durchſchneidenden Linie liegen und alſo Wechſelwinkel ſind. Da ſie einander gleich ſind, ſo ſind die beiden Linien AB und KN parallel.

Beweis zur zweiten Auflösung. Da der Winkel z auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie an den Punkt M in der Richtung von D nach F angetragen wurde, so sind die Winkel z und z einander gleich. Sie sind die innern und äußern entgegengesetzten Winkel, und da zwei Linien mit einander laufen, wenn die innern und äußern an der nämlichen Seite der durchscheidenden Linie liegenden Winkel gleich sind, so thut die Auflösung der Aufgabe ein Genüge.

Beweis zur dritten Auflösung. Man ziehe von dem Durchschnittspunkt Q der beiden Kreisbogen die Linien QN und QP, so entstehen die zwei Dreiecke QPN und QMN, welche einander congruent sind, da QM = PN, QP = MN und QN = QN. In beiden Dreiecken stehen gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber, daher ist x = v. In jedem Dreiecke ist ferner die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich, also ist

$$x + y + z = 2\,R,$$

da aber v statt x gesetzt werden kann, so ist

$$v + y + z = 2\,R,$$

d. h. der Winkel z und die beiden Winkel v + y, die zwischen den Linien KH und AB an derselben Seite der durchschneidenden Linie liegen, sind zweien Rechten gleich. Da aus dieser Eigenschaft die Parallelität der durchschnittenen Linien folgt, so ist also die, durch die beiden Punkte Q und M gezogene, Linie mit der Linie AB parallel.

Bemerkung zu der dritten Auflösung. Man sieht, daß diese Art der Construction den beiden ersten der Kürze und Sicherheit wegen vorzuziehen ist. Die Lösung der Aufgabe wird um so genauer, je größer die Linie NP angenommen wird. Führt man die vorgeschriebene Methode auf beiden Seiten aus, was mit den nämlichen Linien, also ohne größere Weitläuftigkeiten, geschehen kann, so erhält man drei Punkte für die zu ziehende Linie, und dadurch noch größere Genauigkeit.

Anmerkung. Sollen durch mehrere Punkte Parallel-Linien mit einer gegebenen gezogen werden, so geschieht dieß, indem man durch jeden gegeben Punkt Durchschnitts-Linien auf AB zieht, und jeden einzelnen Fall nach den mitgetheilten Vorschriften behandelt.

§. 6.

Aufgabe. Auf eine gegebene Linie von einem Punkte außerhalb derselben eine senkrechte Linie zu fällen. Fig. 8.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt M.

Nachträgliche Anmerkungen zur erſten Abtheilung.

Anmerkung zu §. 66. Berührt die Linie BD den Bogen ADC, ſo iſt nur ein Punkt möglich, wo dieß geſchehen kann, und folglich auch nur eine Auflöſung für den vorgelegten Fall. Durchſchneidet aber BD den Bogen ADC, ſo ſind zwei Durchſchnittspunkte D und D′ möglich, folglich auch, wie leicht erhellt, zwei Auflöſungen, und man hat folgende zwei Proportionen:

$$AE : ED = ED : EC$$

und

$$AE' : E'D' = E'D' : E'C$$

In dieſem Falle iſt alſo die Aufgabe unbeſtimmt.

Anmerkung zu §. 196. Durch eine ähnliche Analyſis löst ſich die Aufgabe: ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden, wenn der Schenkel und Ueberſchuß der Grundlinie über die Höhe gegeben iſt.

Anmerkung zu §. 212. Die beiden gegebenen Auflöſungen gelten für ein gleichſchenkliges Dreieck, deſſen Scheitelwinkel ſpitz iſt. Zieht man durch die Punkte F und A, wie vorhin die Linie FA und macht AB′ = AC und zieht BC, ſo entſteht das Dreieck AB′C, welches den gegebenen Schenkel und die gegebene Höhe FC = BE hat, und alſo die Bedingungen der Aufgabe gleichfalls erfüllt und ſich von ABC nur dadurch unterſcheidet, daß ſein Scheitelwinkel ſtumpf iſt. Hieraus folgt, daß die Aufgabe unbeſtimmt iſt, wenn nicht bemerkt wird, ob das Dreieck ſpitz- oder ſtumpfwinklig ſeyn ſoll.

Die beiden Scheitelwinkel ergänzen ſich, wie leicht erhellt, zu 180°. Da BA = AB′, ſo iſt auch

$$\tfrac{1}{2}AB \,.\, FC = \tfrac{1}{2}AB' \,.\, FC$$

und folglich iſt der Inhalt zweier gleichſchenkligen Dreiecke, die gleiche Schenkel und Scheitelhöhen haben und deren Scheitelwinkel ſich zu 180° ergänzen, einander gleich.

Die mitgetheilten Gleichungen gehen für ein ſtumpfwinkliges gleichſchenkliges Dreieck in folgende über

für die Grundlinie

$$x = \sqrt{2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}}$$

für die Höhe

$$y = \frac{hk}{x} = \frac{hk}{\sqrt{[2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}]}}$$

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1.

Aufgabe. Aus drei Linien, wovon je zwei immer gröſſer als die dritte ſind, ein Dreieck zu bilden. Fig. 1.

Auflöſung. Die gegebenen Linien ſeyen AB, AC, BC. Man betrachte die Linie AB als Grundlinie, beſchreibe von dem einen Endpunkte B derſelben mit der Linie BC einen Kreisbogen rCt, ebenſo von dem andern Endpunkte A mit der Linie AC einen, den vorigen durchſchneidenden, Kreisbogen pCq, ziehe von dem Durchſchnittspunkte C der beiden Kreisbogen C die Linie CA und CB auf die Endpunkte der Linie AB, ſo iſt das Dreieck ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AB iſt vermöge der Conſtruction der Linie AB gleich, ebenſo iſt jede Linie, welche von dem Endpunkte A auf irgend einen Punkt des Kreisbogens pq gezogen wird, der Linie AC, und jede, welche von B auf irgend einen Punkt des Kreisbogens rt gezogen wird, der Linie BC gleich. Der Durchſchnittspunkt C iſt daher der Vereinigungspunkt für die, den gegebenen gleichen Linien AC und BC. Die drei Linien ſind alſo ſo mit einander verbunden, daß ſie ein Dreieck bilden.

Anmerkung. So wie die Linie AB als Grundlinie angenommen wurde, ſo hätte auch jede andere als Grundlinie angenommen werden können, wodurch ein Dreieck von einer andern Lage, aber nicht von verſchiedener Geſtalt oder Gröſſe entſtanden wäre. Ebenſo hätte umgekehrt die Linie BC an den Endpunkt A, und die

Linie AC an den Endpunkt B der Grundlinie AB geſetzt werden können, ohne daß ein von dem erzeugten verſchiedenes Dreieck entſtanden wäre. Hieraus ergibt ſich alſo, daß die Verbindung, in welcher die drei Linien unter einander angereiht werden, ganz gleichgültig iſt, und daß aus drei Linien wohl mehrere Dreiecke gebildet werden können, die der Lage und Stellung nach unter einander verſchieden ſind, in Wahrheit aber immer ein und daſſelbe Dreieck dargeſtellt wird, und daß ſich alſo aus drei Linien nur ein mögliches Dreieck bilden läßt.

Die nämliche Bemerkung gilt noch immer, wenn eine Linie, worauf, oder ein Punkt, woran ein ſchon gegebenes Dreieck getragen werden ſoll, gegeben iſt, oder wenn die drei gegebenen Linien ſelbſt ein Dreieck bilden. Die Aufgabe kann leicht nach dem Geſagten gelöst werden.

§. 2.

Aufgabe. Aus zwei ungleichen Linien ein gleichſchenkliges Dreieck zu bilden. Fig. 2.

Auflöſung. Die Linien ſeyen AB und AC. Man beſchreibe von den Endpunkten A und C der als Grundlinie angenommenen Linie AC, mit der Linie AB zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen und ziehe von ihrem Durchſchnittspunkte B die Linien AB und BC auf die Endpunkte der Grundlinie AC, ſo iſt das Dreieck ABC das geſuchte.

Beweis. Da von den Endpunkten A und C der Linie AC mit der Linie AB zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen gezogen wurden, ſo ſind alle Linien, die von dieſen Punkten auf jene Bogen gezogen werden, ſich und der Linie AB gleich, alſo auch die in dem Punkte B ſich vereinigenden Linien AB und BC, und es iſt alſo das Dreieck ABC ein gleichſchenkliges Dreieck, das die eine Linie als Grundlinie und die andere als Schenkel hat.

Anmerkung. Die Aufgabe iſt ſo lange unbeſtimmt, als nicht angegeben iſt, welche von den gegebenen Linien die Grundlinie und welche die gleichen Schenkel bilden ſoll, denn alsdann entſtehen zwei Dreiecke, welche nicht nur der Lage, ſondern auch der Geſtalt nach von einander verſchieden ſind.

Die Aufgabe iſt ſo lange möglich, als die Schenkel-Linie größer, als die Hälfte der Grundlinie iſt. Sie iſt möglich, wenn letztere kleiner als die Schenkel-Linie iſt. Aus zwei ungleich-großen Linien iſt alſo immer wenigſtens ein gleichſchenkliges Dreieck möglich.

§. 3.

Aufgabe. Es iſt eine Linie gegeben. Man ſoll ein gleichſeitiges Dreieck aus ihr bilden. Fig. 3.

Auflöſung. Die gegebene Linie ſey AC. Man beſchreibe von den beiden Endpunkten der Linie AC mit ihr ſelbſt zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen, und ziehe von ihrem Durchſchnittspunkte B zwei Linien auf die Endpunkte der Linie AC, ſo entſteht das Dreieck ABC, worin die drei Linien einander gleich ſind.

§. 4.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel an einen beſtimmten Punkt anzutragen. Fig. 4.

Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC. Der Punkt M. Man ſchneide von den Schenkeln des Winkels zwei beliebig große Stücke AD, AF ab, und verbinde die Punkte D und F durch eine gerade Linie, wodurch das Dreieck ADF entſteht. Nun lege man in irgend einer Richtung durch den Punkt M eine gerade Linie und trage einen der beiden Schenkel AD = MD an denſelben, und vollende mit den beiden andern Linien AD und DF nach §. 1. das Dreieck MDF, ſo iſt der gegebene Winkel DAF an den Punkt M angetragen.

Beweis. Durch die angegebene Conſtruction iſt ein dem Dreieck ADF congruentes Dreieck MDF über der Linie MD entſtanden und alſo die Linie DF in beiden einander gleich. Da nun in congruenten Dreiecken gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber ſtehen, ſo iſt der Winkel DMF dem Winkel BAC gleich.

Anmerkung. In der angegebenen Conſtruction iſt die Richtung der durch den Punkt M gelegten Linie MD willkührlich angenommen worden. Das Verfahren bleibt daſſelbe, wenn auch die Richtung dieſer Linie beſtimmt, oder ein gegebener Winkel an einen beſtimmten Punkt in einer Linie anzulegen iſt.

§. 5.

Aufgabe. Eine oder mehrere Linien mit einer gegebenen durch einen oder mehrere beſtimmte Punkte parallel zu ziehen.

Es werde zuerſt der Fall betrachtet, wenn nur eine Linie

punkt, der die Linie FG nach dem gegebenen Verhältnisse theilt.

Im zweiten Falle ziehe man (Fig. 16.) eine Parallele PQ mit der das Dreieck ergänzenden Seite MC von dem Durchschnittspunkte P aus, so gibt der Punkt Q den Theilungspunkt der gegebenen Linie DM nach dem gegebenen Verhältnisse an.

Der Beweis folgt aus dem im §. 11. Gesagten leicht.

Anmerkung. Ist eine Linie nach dem Verhältnisse m : n abzutheilen, so trage man auf einer geraden Linie m + n gleiche Theile an einander, bemerke den Durchschnittspunkt P, welcher die Linie nach dem Verhältnisse m : n theilt, und verfahre wie oben.

Hieraus folgt das allgemeine Verfahren ganz deutlich. Ist eine Linie nach mehreren Verhältnissen m : n : p : q . . . . . abzutheilen, so trage man so viele gleiche Theile auf einer geraden Linie aneinander, als die Summe aller Verhältniß-Zahlen m + n + p + q + ... angibt, bemerke die Durchschnittspunkte der betreffenden Verhältnißzahlen, und verfahre sofort auf die schon bekannte Weise.

§. 13.

Aufgabe. Die Größe einer Linie zu bestimmen, welche der $\frac{m}{n}$te Theil einer gegebenen betragen soll. Fig. 17 u. 18.

Die gegebene Linie sey AB und $\frac{m}{n}$ bedeute einen ächten Bruch.

Erste Auflösung. Man trage auf einer geraden Linie AC m + n gleiche Theile auf, bemerke den Durchschnittspunkt C, welcher die in dem Verhältniß m : n stehenden Linien AC und CE erzeugt, und verfahre dann nach der §. 11. gegebenen Methode, so werden die beiden Dreiecke ABC und ADE entstehen, worin sich verhält:

$$AB : BD = AC : CE,$$

oder $$AB : BD = n : m,$$

woraus sich ergibt $$BD = \frac{m}{n} AB.$$

Demnach ist also BD die gesuchte Linie.

Zweite Auflösung. Fig. 18. Man trage auf einer geraden Linie AD n gleiche Stücke aneinander, zähle von A

aus m gleiche Theile ab, welche in der Linie AC begriffen ſind, bemerke den Durchſchnittspunkt des m-ten Theils, trage von A aus an die Linie AD unter einem beliebigen Winkel die gegebene Linie AB an, verbinde die Endpunkte D und B durch die Linie DB mit einander, und ziehe durch den Punkt C eine Linie CK mit DB parallel, ſo iſt das gegen die Spitze A des Dreiecks ABD gelegene Stück AK der $\frac{m}{n}$te Theil der gegebenen Linie.

Beweis. Fig. 18. Durch die Linie CK, welche mit der Linie BD parallel läuft, ſind die beiden ähnlichen Dreiecke ABD und ACK entſtanden, worin ſich alſo verhält

$$AD : AC = AB : AK.$$

Vermöge der Conſtruction iſt

$$AD : AC = n : m,$$

alſo verhält ſich $AB : AK = n : m,$

und es iſt alſo $AK = \frac{m}{n} AB,$

d. h. AK iſt der $\frac{m}{n}$te Theil von AB.

Bemerkung. Die zweite Auflöſung verdient den Vorzug vor der erſten, weil die Geſchäfte, die ſie vorſchreibt, kürzer als die der erſten ſind.

Anmerkung. Iſt unter den nämlichen Bedingungen, wie oben, $\frac{m}{n}$ ein unächter Bruch, alſo m größer als n iſt, ſo daß alſo

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{p}{n}$$

und die zu findende Linie die gegebene um ein beſtimmtes Stück $\left(\frac{p}{n}\right)$ übertrifft, ſo trage man m gleiche Theile auf eine Linie, bemerke den Durchſchnittspunkt C, welcher n Theile abſchneidet, und verfahre mit Parallel-Linien wie oben.

§. 14.

Aufgabe. Es ſind zwei Linien gegeben, man ſoll zwei andere Linien finden, welche mit den gegebenen die innern oder äuſſern Glieder einer geometriſchen Proportion bilden.

Erſte Auflöſung. Fig. 19. Die gegebenen Linien ſeyen AB und AC. Man verbinde die beiden Linien unter ir-

gend einem Winkel in dem Punkte A mit einander, ziehe von dem Endpunkte der kleinern auf irgend einen Punkt innerhalb der gröſsern eine Linie CD und mit dieſer von dem Endpunkte der gröſsern eine Parallele BE, verlängere die kleinere Linie AC, daß ſie dieſe Parallele BE in einem Punkt E treffe, ſo ſind die Linien AD und AE die geſuchten.

Zweite Auflöſung. Fig. 20. Man verbinde die gegebenen Linien unter irgend einem Winkel BAC, beſchreibe von dem Endpunkte einer jeden mit der andern Linie zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen, lege durch ihren Durchſchnittspunkt M in irgend einer Richtung hinlänglich ausgedehnt eine Linie PQ, und verlängere die beiden Linien AB und AC, bis ſie die Linien PQ durchſchneiden, ſo ſind die Ueberſchuſs-Linien CD und BF die geſuchten.

Beweis zur erſten Auflöſung. Die Linie AB und AC ſind unter irgend einem Winkel zuſammengeſetzt, die Linie BE läuft parallel mit der willkührlich gezogenen DC; dadurch entſtehen zwei Dreiecke ADC und ABE, welche durch eine parallele Linie von einander getrennt ſind. Es gilt demnach folgende Proportion:

$$AC : AD = AE : AB,$$

oder wenn die innern und die äuſſern Glieder verſetzt werden:

$$AD : AC = BA : AE,$$

und demnach ſind die beiden Linien AD und AE ſo beſchaffen, daß ſie mit den gegebenen die innern oder äuſſern Glieder einer geometriſchen Proportion bilden.

Beweis zur zweiten Auflöſung. Die Linie CM iſt gleich der Linie AB, und die Linie MB gleich der Linie AC; hieraus folgt: daß die Linie MB mit CA und CM mit AB parallel läuft; ferner, daß die Winkel x, x', x'', ebenſo y und y' einander gleich ſind. Aus der Gleichheit je zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt die Aehnlichkeit der letztern, demnach ſtehen alſo die Seiten der Dreiecke DCM und MBF in gleichen Verhältnißen, und hieraus entnimmt man folgende Proportion: $CD : CM = MB : BF$,

oder da AB ſtatt CM und CA ſtatt BM geſetzt werden darf:

$$CD : AB = CA : BF,$$

und

und hieraus durch Verſetzung der innern und äuſſern Glieder dieſer Proportion: AB : CD = BF : AC.

Demnach bilden die, auf obige Art gefundenen, Linien CD und BF die mittlern oder äuſſern Glieder einer geometriſchen Proportion.

Anmerkung. An beide Auflöſungen ſchließt ſich leicht die Bemerkung an, daß unzählig viele Fälle der Aufgabe genügen. Denn im erſten Falle hängt die Auflöſung von der Annahme des Punktes D in der Linie AB ab. Da nun dieſe keinen weitern Beſtimmungen unterliegt, ſondern willkührlich iſt, ſo muß auch jede Annahme zwei verſchiedene Linien als äuſſere oder innere Glieder der Proportion erzeugen.

Das Nämliche iſt bei der zweiten Auflöſung der Fall. Die Größe der Linien CD und BF hängt von der Richtung ab, in welcher die Linie PQ durch den Punkt M gelegt wird. Da nun durch dieſen Punkt unzählig viele Richtungen möglich ſind, ſo muß es auch unzählig viele Fälle geben, welche dieſer Aufgabe genügen. Dieſe Aufgabe gehört demnach zu den Unbeſtimmten.

§. 15.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportional-Linie zu finden.

Erſte Auflöſung. Fig. 21. Die drei gegebenen Linien ſeyen a, b, c, und das Verhältniß, worin ſie zu einander ſtehen, ſey angedeutet durch a : b = c : x. Man verbinde zwei Linien von unbeſtimmter Größe unter irgend einem Winkel mit einander, trage von dem Durchſchnittspunkte der beiden Linien M aus auf beiden Schenkeln des Winkels die Linien des erſten Verhältniſſes a = ME, b = MF auf, verbinde die beiden Endpunkte dieſer Linien E und F durch eine gerade Linie EF mit einander, trage auf denjenigen Schenkel, worauf die erſte Linie getragen iſt, die dritte Linie c = EK an und ziehe durch ihren Endpunkt K eine Linie parallel mit der Linie EF, welche die gegenüber liegende Linie durchſchneidet, ſo wird die hiedurch abgeſchnittene Linie FG die vierte Proportional-Linie ſeyn.

Beweis. Die Linie MF = b, ME = a, EK = c vermöge der Conſtruction; ferner läuft die Linie GK parallel

mit der Linie FE. Hierdurch entstehen die beiden Dreiec MGK und MFE, welche, durch Parallel-Linien erzeug einander ähnlich sind, und hierin gilt, wie bekannt, folgen Proportion: ME : MF = EK : FG.

Da nun die drei ersten Linien der Proportion den gegeben drei Linien gleich sind, so geht diese Proportion in folgende über

a : b = c : FG,

und demnach ist also FG die gesuchte vierte Proportional-Li zu den drei gegebenen Linien a, b, c,

Zweite Auflösung. Fig. 20. Man verfahre n §. 14. zweite Auflösung; trage auf den Schenkel eines bel bigen Winkels DAF die zweite und die dritte Linie, (m AB = b, AC = c) und trage an die Linie des zwei Gliedes die Linie des ersten Gliedes a = CD an, ziehe C und B aus mit den Linien b und c zwei sich in Punkte M durchschneidende Kreisbögen, lege durch D und die gerade Linie DF und verlängere die Linie AB bis sie Linie DF durchschneidet, so ist die Linie BF die gesu vierte Proportional-Linie.

Der Beweis führt sich leicht aus folgender Proportion:

CD : AB = CA : BF.

Werden nun statt den Linien CD, AB, CA ihre ursprüngli Werthe gesetzt, so entsteht:

a : b = c : BF,

und demnach ist die Linie BF die gesuchte vierte Propor nal-Linie.

§. 16.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die dritte metrische Proportional-Linie zu finden.

Auflösung. Fig. 22. Die gegebenen Linien seyen b, die gesuchte x und das Verhältniß, worin die drei Li zu einander stehen, sey angedeutet durch die Proportion

a : b = b : x.

Man verbinde zwei Linien von unbestimmter Länge unte gend einem Winkel mit einander, und trage von dem Ver gungspunkt der beiden Linien M die Linien a = b

und b = MF auf die zwei Schenkel des Winkels, verbinde die Endpunkte dieſer Linie C und F durch eine dritte CF, und ſetze die Linie b = CK an die erſte Linie MC an, und ziehe mit der Linie CF durch den Endpunkt K der Linie CK eine Parallele, und verlängere MF bis zum Durchſchnitte G, ſo wird die dadurch angegebene Linie FG die geſuchte dritte Proportional-Linie ſeyn.

Beweis. Vermöge der Conſtruction ſind zwei ähnliche Dreiecke MFC und MGK entſtanden. Es gilt daher folgende Proportion: MC : MF = CK : FG.

Da nun die MF ſo groß als CK und MC = a, MF = b iſt, ſo gehet obige Proportion in folgende über:

a : b = b : FG.

Es iſt alſo FG = x, und zu a und b iſt die dritte Proportional-Linie gefunden.

§. 17.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometriſche Proportional-Linie zu finden.

Erſte Auflöſung. Fig. 23. Die gegebenen Linien ſeyn CM = a und MD = b. Es ſoll eine Linie x geſucht werden, daß iſt a : x = x : b.

Man reihe die zwei gegebenen Linien in gerader Linie CMD aneinander und bemerke ihren Berührungspunkt M, beſchreibe über ihrer Summe einen Halbkreis und errichte nach §. 7. auf dem Berührungspunkt der beiden Linien M eine ſenkrechte Linie, welche die Krümmungslinie des Halbkreiſes in F durchſchneidet, ſo iſt die Linie MF zwiſchen der Peripherie und dem Berührungspunkte M die geſuchte Linie.

Beweis. Man ziehe die Hülfslinien CF und FD, ſo müſſen, da die Linie FM ſenkrecht auf CD aufſteht, zwei rechtwinklige Dreiecke CMF und FMD, worin der Winkel r = r'. Der Winkel x + y iſt ein rechter, weil die beiden Schenkel, welche ihn bilden, auf den Endpunkten des Diameters in dem Halbkreiſes CFD aufſtehen. Der Winkel y + q iſt ein Rechter, weil es die zwei an der Hypothenuſe anliegenden

Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ſind. Demnach iſt alſo

$$x + y = y + q,$$

und hieraus, wenn auf beiden Seiten der Winkel y abgezogen wird, folgt: daß der Winkel x in dem Dreiecke CMF gleich iſt dem Winkel q im Dreieck FMD. Da nun zwei Winkel eines Dreiecks die Größe des dritten Winkels beſtimmen, ſo iſt auch der Winkel $p = y$, und hieraus folgt die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CFM und DFM, und es gilt alſo zwiſchen den, gleichen Winkeln gegenüberſtehenden, Seiten folgende Proportion: CM : FM = FM : MD.
Da nun CM der Linie a und MD der Linie b gleich iſt, ſo geht die vorliegende Proportion in folgende über:

$$a : FM = FM : b,$$

und die Linie FM iſt alſo die verlangte Linie.

Zweite Auflöſung. Fig. 24. Man beſchreibe über der größern Linie CD einen Halbkreis, und ſchneide von ihr die kleinere ab = CE ab, errichte in dem Durchſchnittspunkte E eine ſenkrechte Linie, welche die Krümmungslinie des Halbkreiſes durchſchneidet, und verbinde den Durchſchnittspunkt der Peripherie M und den Endpunkt C der kleinern Linie CE durch eine gerade Linie CM, ſo iſt dieſe die geſuchte Linie.

Beweis zur zweiten Auflöſung. Man ziehe die Hülfslinie MD, dadurch entſtehen folgende zwei hier nöthige Dreiecke CME und CMD. Da die Linie EM ſenkrecht auf CD aufſteht, ſo iſt das Dreieck CME ein rechtwinkliges. Das Dreieck CMD iſt gleichfalls rechtwinklig, weil die Spitze des Winkels CMD in der Peripherie liegt, und die beiden Schenkel CM und MD auf den Endpunkten des Durchmeſſers aufſtehen. Der Winkel x gehört zu dem Dreieck CEM und zu dem Dreieck CMD. Da nun die Summe zweier Winkel eines Dreiecks die Größe des dritten beſtimmt, ſo muß auch der Winkel y im Dreieck CME und der Winkel p im Dreieck CMD einander gleich ſeyn, wodurch die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke bedingt iſt. Demzufolge gilt alſo folgende Proportion zwiſchen der Hypotenuſe und einer Cathete der beiden rechtwinkligen Dreiecke

$$CD : CM = CM : CE.$$

Da nun CD = a, und CE = c ist, so geht die vorliegende Proportion in folgende über:

$$b : CM = CM : a,$$

woraus hervorgeht, daß CM der Aufgabe ein Genüge thut.

Zusatz 1. Fig. 24. Da die Linie CD der Durchmesser eines Kreises und MF eine zu demselben senkrechte und bis zur Peripherie verlängerte Linie ist, so folgt aus dem Beweis zur ersten Auflösung folgende Bemerkung: Die auf dem Durchmesser eines Kreises senkrecht aufgestellte und bis an die Peripherie verlängerte Linie ist die mittlere Proportional-Linie zwischen den beiden Abschnitten des Diameters; oder, da CFD ein rechtwinkliges Dreieck und FM die von der Spitze desselben auf die Hypotenuse gefällte senkrechte Linie ist, so folgt: die von der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte senkrechte Linie ist die mittlere Proportional-Linie zwischen den beiden durch sie erzeugten Abschnitten der Hypotenuse.

Zusatz 2. Fig. 25. Da CMD ein rechtwinkliges Dreieck ist, so fließt daraus folgende Bemerkung: Die eine Cathete ist die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Hypotenuse und dem an dieser Cathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse, welcher durch den von der Spitze des rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällten Perpendikel erzeugt wird.

§. 18.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere arithmetische Proportional-Linie zu finden.

Auflösung. Fig. 25. Die gegebenen Linien seyen AB und CD. Man nehme irgend eine Linie AC willkührlich an und errichte auf ihren Endpunkten A und C die gegebenen Linien AB und CD senkrecht, und verbinde ihre Endpunkte durch die Linie BD, halbire die angenommene Linie AC in E und richte in E die Linie EM senkrecht, daß sie die Verbindungslinie BD in M schneide, so ist die Linie EM die gesuchte.

Beweis. Man verlängere die kleinere Linie AB nach K zu, und lege durch den Punkt M die Linie KG mit der angenommenen Linie AC parallel, wodurch die Linien KM und MG entstehen. Da die drei Linien AK, EM und CD senkrecht auf AC aufstehen, so laufen sie miteinander parallel. Die Linie KG läuft mit AC parallel. Die Linie AE ist der Linie EC gleich, folglich sind die Linien KM und MG auch

als zwiſchen gleichen Parallelen liegend, einander gleich. D Winkel KMB und DMG ſind als Scheitelwinkel einand gleich, ebenſo die Winkel BKM und MGD als innere Wec ſelwinkel zwiſchen den Parallelen AK und CD. Hieraus fol die Congruenz der Dreiecke KMB und MDG, und alſo au der Seiten KB und DG.

Da nun die Linie ME der GC und der KA gleich iſt, iſt die Summe von GC und KA doppelt ſo groß, als d Linie ME, und es iſt:

$$2 \cdot ME = KA + GC,$$

wird nun von der Linie KA das Stück KB weggenommen u zu GC das jenem gleiche Stück DG geſetzt, ſo verändert ſi die Richtigkeit der mitgetheilten Gleichung nicht, und es iſt alſ

$$2 \cdot ME = AB + DC,$$

und ME iſt alſo die arithmetiſche Proportional-Linie zwiſch den beiden gegebenen Linien.

Anmerkung. In dem vorliegenden Falle wurde die Auflöſu unter der Bedingung vorgetragen, daß die gegebenen Parallelen ſenkre auf AC aufgeſtellt wurden. Man ſieht leicht ein, daß der nämlic Zweck erreicht worden wäre, wenn die beiden Linien unter irge einem andern Winkel aufgeſetzt worden wären. Im letzten Fall m dann die Linie EM von der Mitte der Linie AC aus parallel n den gegebenen Linien gezogen werden. Man kann die mittlere arit metiſche Proportional-Linie auf eine leichtere und ſchnellere A dadurch finden, daß man die beiden gegebenen Linien AB und C in gerader Richtung zuſammen ſetzt und ihre Summe halbir wodurch das nämliche Reſultat entſtanden wäre. In jenem Fa wäre uns aber durch die Bemerkung entgangen, daß die Sum zweier begränzter ungleicher Parallel-Linien doppelt ſo groß iſt als d Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Seiten-Linien verbinde

§. 19.

Aufgabe. Zur Summe und Differenz zweier Lini die mittlere geometriſche Proportional-Linie finden. Fig. 26.

Auflöſung. Die größere Linie ſey CD = a, die kl nere CM = b. Man beſchreibe über der größeren Linie C einen Halbkreis, trage an dem einen Endpunkte die kleine Linie CM ſo an, daß ſie die Peripherie in dem Punkte

durchſchneide, und verbinde den Durchſchnittspunkt M mit dem andern Endpunkte D der gegebenen Linie a, ſo iſt die Linie MD die geſuchte Linie.

Beweis. Man verlängere die Linie CM in gerader Richtung von dem Punkte C aus um die Linie CD = CF, beſchreibe von C aus mit a = CD einen Halbkreis, und verlängere auch CM von M aus, daß ſie die Peripherie des Halbkreiſes trifft. Dieſer Darſtellung zufolge iſt:

$$FM = CD + CM,$$

d. h. der Summe der beiden gegebenen Linien gleich.

$$MG = CD - CM,$$

d. h. der Differenz derſelben gleich.

Die Linie MD ſteht ſenkrecht auf dem Durchmeſſer, und iſt alſo nach §. 17. Zuſatz 1. die mittlere geometriſche Proportional-Linie zwiſchen FM und MG. Es gilt alſo folgende Proportion:

$$FM : MD = MD : MG,$$

oder da FM die Summe und MG die Differenz beider ausdrückt:

$$a + b : MD = MD : a - b,$$

und es iſt alſo MD die mittlere Proportional-Linie zwiſchen der Summe und der Differenz der gegebenen Linien a und b.

Anmerkung. Man hätte dieſe Aufgabe auch auf die §. 17. angegebene Methode löſen können. Dieſe Auflöſungsart aber iſt hier mitgetheilt, weil man durch ſie auf folgenden intereſſanten Satz geführt wird: daß die eine Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks die mittlere geometriſche Proportional-Linie zwiſchen der Summe und Differenz der Hypotenuſe und der andern Cathete iſt.

§. 20.

Aufgabe. Es iſt eine Linie gegeben und zwei Punkte auſſerhalb derſelben. Einen Punkt in der Linie anzugeben, welcher von den gegebenen Punkten gleich weit abſteht. Fig. 27.

Auflöſung. Die gegebene Linie ſey AB, die Punkte auſſerhalb derſelben P, Q. Man verbinde die beiden Punkte P und Q durch eine gerade Linie PQ mit einander, und errichte in der Mitte derſelben (§. 9.) eine ſenkrechte Linie MN

(§. 7.), welche die gegebene Linie AB in dem Punkte M durchſchneidet, ſo iſt der Punkt N der geſuchte Punkt.

Beweis. Da der Punkt M in der Mitte der Linie PQ liegt und MN ſenkrecht auf PQ aufſteht, ſo iſt PM = MQ und der Winkel y dem Winkel x gleich. Die Linie MN bildet die Trennungslinie für die Dreiecke PMN und QMN. Da nun beide Dreiecke zwei Linien und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel gleich haben, ſo ſind auch die beiden Dreiecke congruent, und hieraus ergibt ſich, daß die Linie PN der Linie NQ gleich iſt, und alſo der Punkt N von den beiden Punkten P und Q gleich weit abſteht.

§. 21.

Aufgabe. Es iſt eine Linie gegeben und zwei Punkte auſſerhalb derſelben. Man ſoll von den beiden Punkten zwei Linien, mit einander parallel auf die gegebene Linie ziehen, ſo daß die Summe beider dem Abſtande beider Punkte von einander gleich ſey. Fig. 28.

Auflöſung. Die Linie ſey AB, die beiden Punkte auſſerhalb derſelben P und Q. Man verbinde die gegebenen Punkte P und Q durch eine gerade Linie mit einander, halbire dieſe gerade Linie PQ, und lege die Hälfte von M aus ſo in die gegebene Linie, daß ihr Endpunkt K in die gegebene Linie AB falle, ziehe die gerade Linie MK, und parallel mit dieſer Linie von den beiden gegebenen Punkten P und Q die Linien PF und PQ, welche die gegebenen Linien treffen; ſo ſind dieſe beide Linien ſo groß, als die Entfernung der beiden Punkte P und Q von einander.

Beweis. Die Linie KM iſt der Hälfte von PQ gleich, mit ihr laufen die beiden Linien FP und GQ vermöge der Conſtruction parallel, demnach iſt nach der Bemerkung des §. 18. die Linie MK eine Linie, welche die Seitenlinien zweier begränzten Parallelen halbirt, und alſo der Hälfte jener gleich iſt. Die Linie MK aber iſt auch der Hälfte der Entfernung zwiſchen den gegebenen zwei Punkten gleich, folglich iſt die Entfernung zwiſchen den beiden Punkten PQ und die Summe der Linien GQ

und FP einander gleich, und die Auflösung thut der Aufgabe Genüge.

Bemerkung über die Möglichkeit der Aufgabe. Die Aufgabe ist, wie man sich leicht überzeugen kann, nur so lange möglich, als die Hälfte der Entfernung der beiden Punkte von einander eben so groß, oder größer ist, als der senkrechte Abstand der Linie AB von dem Mittelpunkte M der Entfernung zwischen den gegebenen Punkten. Ist dieser größer, so wird die Aufgabe unmöglich.

§. 22.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von den beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Linien auf die gegebene so ziehen, daß ihre Summe dreimal so groß, als die Entfernung beider Punkte von einander ist. Fig. 29.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, die beiden Punkte P und Q. Man halbire die Entfernung zwischen den beiden Punkten, bemerke den Punkt M, und nehme eine Linie, welche der Entfernung zwischen beiden Punkten und ihrer Hälfte gleich ist, und trage diese Linie CD von dem Mittelpunkte M aus so an, daß ihr Endpunkt D in die Linie AB falle, und ziehe die Linie MD und mit dieser durch die gegebenen Punkte P und Q Parallel-Linien, welche die gegebene Linie AB durchschneiden, so sind die Linien PG und QK die Gesuchten.

Beweis. Die Linie MD ist gleich der Hälfte der dreifachen Entfernung zwischen den beiden Punkten, und läuft von der Mitte M der Linie PQ aus mit den beiden Linien PQ und QK parallel, ist also auch nach §. 18. der Hälfte beider Parallelen GP und KQ gleich. Hieraus folgt, daß die Summe dieser beiden Parallelen der dreifachen Entfernung zwischen den beiden Punkten P und Q gleich ist, und also den Anforderungen der Aufgabe ein Genüge leistet.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich sehr leicht ganz allgemein stellen. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von den beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Li-

nien auf die gegebene so ziehen, daß ihre Summe d
nfachen Entfernung gleich ist. Die Auflösung ergibt sich lei
wenn man die halbe Entfernung zwischen beiden Punkten nmal, oder
Entfernung $\frac{n}{2}$ mal nimmt, und diese Linie von dem Mittelpun
der Entfernung zwischen beiden Punkten auf die gegebene Linie a
legt, und dann von den beiden Punkten Parallelen mit ihr zi
Ebenso kann diese Aufgabe leicht gelöst werden, wenn von den b
den Punkten Parallelen gezogen werden sollen, deren Sum
$\frac{1}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ von der zwischen den gegebenen Punkten liegenden E
fernung betragen soll.

Die Möglichkeit der Aufgabe wird dadurch bedingt, daß
senkrechte Abstand des Mittelpunktes der beiden gegebenen Pu
von den gegebenen Linien eben so groß oder kleiner ist, als die Hä
der fraglichen Summe. Sie wird unmöglich, wenn derselbe gr
ist als die Hälfte der fraglichen Summe.

§. 23.

Aufgabe. Es ist eine begränzte Linie und ausserh
derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch
gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß z
von den Endpunkten der gegebenen Linie
jene parallel gezogene Linie der gegebenen Li
gleich seyen, und die eine noch einmal so groß,
die andere sey. Fig. 30.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt
Man setze die gegebene Linie AB an sich selbst, wod
die Linie FB entsteht; verbinde den gegebenen Punkt D
dem Endpunkt F, so gibt die Linie FD die Lage der gesuc
Linie an. Man theile nun die gegebene Linie AB in
Theile, und trage von dem einen Endpunkte A aus ein D
theil und von dem andern zwei Drittheile von AB so ge
die gefundene Linie FD, daß ihre beiden Endpunkte in dies
fallen, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Die Linie AB wurde an sich selbst gesetzt,
durch die Linie FB entstand, welche also doppelt so groß,
die gegebene Linie ist. Durch den Punkt D wurde von F
die Linie FDM′ gezogen; die gegebene Linie AB wurde
zwei Theile AM und MB getheilt, wovon die eine $\frac{1}{3}$

und die andere $\frac{1}{3}$ AB beträgt, und ſich daher zu einander wie 1 : 2 verhalten, und dieſe Linien wurden an den Endpunkten der gegebenen Linie AB ſo aufgetragen, daß ſie in die durch D gezogene Linie auffielen, und mit ihr die Dreiecke FAM′ und FBM′ bilden. Unter dieſen Linien gelten nun folgende Proportionen:

$$FA : FB = 1 : 2$$

$$AM' : BM' = 1 : 2,$$

und hieraus $FA : FB = AM' : BM'$

Es ſind alſo die beiden Dreiecke FAM′ und FBM′ einander ähnlich, die Linien AM′ und BM′ alſo auch einander parallel, und betragen zuſammen die Summe der gegebenen Linie AB, auch iſt die eine noch einmal ſo groß als die andere. Sie entſprechen alſo den Forderungen der Aufgabe vollkommen.

Die Aufgabe iſt ſo lange möglich, als der ſenkrechte Abſtand der Linie FM′ von dem Endpunkte A der gegebenen Linie AB gleich oder kleiner iſt, als der ihm zugehörige Theil der Linie AB. Sie wird unmöglich, wenn derſelbe größer iſt, was ſich leicht erkennen läßt.

Auch iſt leicht einzuſehen, daß es zwei Lagen der Linien AM′ und BM′ gibt, welche der Aufgabe genügen, wenn AM′ größer iſt, als der ſenkrechte Abſtand von A auf FM′.

§. 24.

Aufgabe. Es iſt eine begränzte Linie und auſſerhalb derſelben ein Punkt gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt eine Linie ſo legen, daß zwei von den Endpunkten der gegebenen Linie parallel laufende Linien doppelt ſo groß, als die gegebene Linie ſeyen, ſie ſelbſt aber zu einander in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen. Fig. 31.

Auflöſung. Die gegebene Linie ſey AB, der gegebene Punkt D, das Verhältniß, worin die beiden Linien zu einander ſtehen ſollen, ſey 2 : 3. Man ſetze die gegebene Linie dreimal aneinander, wodurch die Linie FB entſteht, nehme die Linie AB doppelt, theile ſie nach §. 11. in fünf gleiche Theile, und bemerke den Punkt, welcher zwei und drei

gleiche Theile von einander trennt, wodurch die Linien EM und FM entſtehen. Nun ziehe man von dem Endpunkte F der Linie FB durch den gegebenen Punkt eine unbeſtimmte Linie, und trage von den Endpunkten der Linie AB die beiden Linien EM und FM ſo auf, daß ihre Endpunkte in die durch den Punkt D gehende Linie auffallen, wodurch die Linien AM′ und BM′ entſtehen, ſo ſind dieß dieſe geſuchten Linien.

Beweis. Die Linie AB wurde dreimal an ſich angereiht, wodurch die Linie BF und FA entſtand, die ſich wie 2 : 3 zu einander verhalten. Die Linie EF iſt zweimal ſo groß als AB, und in zwei Theile EM und MF getheilt, welche ſich zu einander wie 2 : 3 verhalten. Aus den Linien AM′ = EM und BM′ = MF wurden mit den Linien FA und FM′, FB und BM′ zwei Dreiecke conſtruirt, worin nun folgende Proportionen gelten:

$$FA : FB = 2 : 3$$

$$M'A : BM' = 2 : 3$$

und hieraus $FA : FB = AM' : BM'$.

Die hier gemachten Linien AM′ und BM′ durchſchneiden die Schenkel eines Winkels ſo, daß ſeine Abſchnitte mit ihnen in gleichem Verhältniſſe ſtehen, alſo laufen ſie mit einander parallel, ſtehen zu einander in dem Verhältniſſe wie 2 . 3, betragen ihrer Summe nach doppelt ſo viel als die gegebene Linie AB, und entſprechen alſo den in der Aufgabe geſtellten Bedingungen.

Anmerkung. Die Aufgabe iſt ſo lange möglich, als der ſenkrechte Abſtand von einem Endpunkte auf die durch den gegebenen Punkt zu ziehende Linie eben ſo groß, oder kleiner, als der dieſem Endpunkte anzuſetzende Theil der gegebenen doppelten Linie AB iſt. Iſt er größer, ſo iſt die Aufgabe unmöglich, denn alsdann kann dieſe Linie nicht mehr von ihm erreicht werden.

Anmerkung über die Anzahl der Conſtruktionen. In dem Falle, wo die an den Endpunkten der gegebenen Linie AB anzuſetzenden Verhältniß-Theile den ſenkrechten Abſtänden gleich ſind, iſt nur ein Fall möglich; ſind ſie aber größer, ſo ſind an der durch den Punkt D gehenden Linie FM zwei Durchſchnittspunkte möglich, welche den Anforderungen der Aufgabe Genüge leiſten.

Zuſatz. Dieſe Aufgabe läßt ſich leicht in das Allgemeine ausdehnen, wenn unter den nämlichen Bedingungen, wie oben, die Linien, welche von den Endpunkten der gegebenen Linie

auf die durch den Punkt zu ziehende parallel gefällt werden sollen, zu einander in dem Verhältnisse wie m : n stehen, und das rfache oder dem rten Theil der Linie AB gleich seyn sollen. Die Auflösung der Aufgabe wird leicht auf eine der obigen ähnliche Art gewonnen. Die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe verändern sich nach den gegebenen Prämissen.

§. 25.

Aufgabe. Es ist eine gerade unbegränzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte aus eine Linie auf die gegebene so ziehen, daß sie einen bestimmten Winkel mit jener bilde. Fig. 32.

Auflösung. Die gerade unbegränzte Linie sey AB, der gegebene Punkt D und der gegebene Winkel BED. Man trage nach §. 4. an einen willkührlich gewählten Punkt K in der gegebenen Linie den gegebenen Winkel BED so an, daß der eine Schenkel in die gegebene Linie AB falle, und verlängere den andern Schenkel KG unbestimmt, so wird er entweder den gegebenen Punkt treffen, oder nicht. Im ersten Falle ist die Aufgabe gelöst, im zweiten ziehe man durch den gegebenen Punkt D mit dem Schenkel KG eine Parallele, welche die gegebene Linie AB in einem Punkt E trifft, so ist der hierdurch gebildete Winkel DEB der gesuchte; denn der construirte Winkel ist wegen der gezogenen Parallel-Linie dem gegebenen gleich, und einer seiner Schenkel gehet durch den gegebenen Punkt D.

Der **Beweis** erhellt leicht aus der Construction.

Anmerkung. Der Lage nach sind zwei Constructionen möglich, die eine auf der einen, die andere auf der entgegengesetzten Seite des Punktes. Bei einem rechten Winkel ist nur eine möglich.

§. 26.

Aufgabe. Es ist eine gerade Linie und eine auf ihr senkrecht stehende begränzte Linie gegeben. Man soll einen gegebenen Winkel so auf erstere tragen,

daß der eine Schenkel in dieſe falle, der andere den Endpunkt der ſenkrechten treffe.

Erſte Auflöſung. Fig. 33. Die gegebene unbegränzte Linie ſey AB, die ſenkrechte CD und der gegebene Winkel ſey DEB. Man trage an einen willkührlichen Punkt K auf einer der Seiten der gegebenen ſenkrechten Linie den gegebenen Winkel an, daß der eine Schenkel auf die gegebene Linie AB falle und der andere KE in ſolcher Richtung, daß er die ſenkrechte Linie ſelbſt oder ihre Verlängerung treffe. Nun ziehe man durch den Endpunkt D der ſenkrechten Linie GK eine Parallele, welche die gegebene Linie AB in einem Punkte E durchſchneidet, ſo iſt der Winkel AED der geſuchte.

Zweite Auflöſung. Fig. 34. Man errichte an der Spitze E des gegebenen Winkels BEM mit einem der beiden Schenkel eine ſenkrechte Linie, wodurch der Winkel FEM entſteht, trage dieſen Winkel FEM ſo an die Spitze D der ſenkrechten Linie DC, daß ein Schenkel in dieſe Linie falle und der andere die gegebene Linie AB durchſchneide, ſo iſt der hierdurch entſtandene Winkel DEA der geſuchte.

Der Beweis zur erſten Auflöſung findet ſich vermittelſt der Parallel-Linien KG und DE, welche gleiche Winkel mit der Linie AB bilden, und von denen die letztere durch den gegebenen Endpunkt der ſenkrechten Linie CD geht, leicht.

Beweis zur zweiten Auflöſung. Da die Linie CD ſenkrecht auf AB aufſteht, ſo iſt der Winkel r ein rechter und die beiden andern Winkel x und y in dem Dreieck CDE ſind als die Ergänzungswinkel der drei Winkel eines Dreiecks zu zwei rechten, gleichfalls einem rechten Winkel gleich. Die beiden Winkel FEM und MEB ſind ebenfalls einem Rechten gleich. Der an dem Endpunkte D der ſenkrechten Linie angetragene Winkel x iſt vermöge der Conſtruction dem Winkel FEM gleich, alſo muß auch der ihm zu einem rechten Winkel ergänzende Winkel y dem Winkel MEB gleich ſeyn. Demnach iſt der Winkel AED dem gegebenen gleich und ſein Schenkel geht durch den Endpunkt D der ſenkrechten Linie.

§. 27.

Aufgabe. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt ausserhalb derselben gegeben. Man soll zwei gegebene Winkel so auf die Linie tragen, daß sich ihre Schenkel in dem gegebenen Punkte vereinigen.

Auflösung. Fig. 35. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt D, die Winkel M'F'A' und B'E'K'. Man trage jeden der gegebenen Winkel an zwei willkührliche Punkte E und F der gegebenen Linie so an, daß der eine Schenkel auf die Linie selbst, der andere auf diejenige Seite, auf welcher der gegebene Punkt liegt, falle, wodurch die Winkel BEK und AFM entstehen, ziehe von dem Punkte D aus mit den Schenkeln EK und FM Parallel-Linien, so werden die hierdurch entstandenen Winkeln DIIA und DGB die gesuchten Winkel seyn.

Der **Beweis** führt sich nach §. 26. leicht.

Anmerkung. Die beiden Winkel werden innerhalb der Linien GD und HD liegen, wenn die beiden gegebenen Winkel spitz, oder ein spitzer und stumpfer sind, welche zusammen weniger als zwei rechte betragen; sie werden ausserhalb der Linie liegen, wenn jeder von ihnen ein stumpfer ist. Die Aufgabe selbst wird endlich unmöglich, wenn die anzutragenden Winkel zusammen zwei Rechten gleich sind, denn in diesem Falle werden die Schenkel der Winkel parallel laufen, und sich also nie durchschneiden.

§. 28.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben und zwei Punkte ausserhalb derselben. Man soll einen Punkt in der gegebenen Linie so bestimmen, daß zwei von ihm auf die gegebenen Punkte gezogene Linien zwei gleiche Winkel an der Linie erzeugen.

Auflösung. Fig. 36. Die gegebene Linie heiße AB, die Punkte ausserhalb derselben P und Q. Man ziehe von einem Punkte z. B. P eine senkrechte Linie nach §. 6. auf AB, welche dieselbe in C durchschneidet, und verlängere dieselbe

auf der entgegengesetzten Seite, daß die Verlängerung DC der Linie PC gleich werde; verbinde den Endpunkt D dieser Verlängerung mit dem andern Punkt Q durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt M dieser und der gegebenen Linie AB der gesuchte Punkt.

Beweis. Man ziehe die Linie MP. Da die Linie PD auf AB senkrecht steht, so ist der Winkel x und der Winkel y ein rechter und beide einander gleich, ebenso ist vermöge der Construction die Linie CP = CD. Die Linie MC erzeugt mit den genannten und den Linien MP und MD zwei Dreiecke, welche congruent sind, weil sie zwei Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben. Hieraus folgt ferner: daß die Winkel r und s als gleichen Seiten gegenüberstehend, einander gleich sind. Nun ist der Winkel r dem Winkel v gleich, weil es Scheitelwinkel sind, und hieraus fliest, da r = s ist, daß der Winkel v dem Winkel s gleich ist, d. h. die von dem Punkte M auf die Punkte Q und P gezogenen Linien bilden zwei, an der Linie AB gelegene gleiche Winkel.

§. 29.

Aufgabe. Es sind zwei in einem Punkte sich vereinigende Linien und ein Punkt zwischen beiden gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß die Winkel, welche sie mit den beiden Linien macht, einander gleich sind.

Auflösung. Fig. 37. Die Linien seyen AB und AC und der gegebene Punkt sey D. Man ziehe von dem gegebenen Punkte D auf eine Linie AB eine Linie DE parallel mit der gegenüberliegenden Linie, trage von dem Durchschnittspunkte E aus die Linie DE auf die Linie AB auf, wodurch die Linie EF entsteht, ziehe von F durch den gegebenen Punkt D eine gerade Linie FG auf die gegenüberliegende Linie, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis. Die Linie ED und die Linie EF sind gleich groß, also ist das Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck und die beiden

beiden Winkel an der Grundlinie x und y ſind einander gleich. Da die Linie ED parallel mit der Linie AG geht, und beide von FG durchſchnitten werden, ſo iſt der Winkel y dem x', als der innere dem äuſſeren entgegengeſetzten, gleich. Da aber x auch dem Winkel y gleich iſt, ſo kann x ſtatt y geſetzt werden, und es iſt $x = x'$.

Die Linie FG bildet die beiden ſich gleichen Winkel und gehet durch den Punkt D, daher leiſtet ſie den Anforderungen der Aufgabe Genüge.

§. 30.

Aufgabe. Es iſt eine Linie und auſſer ihr ein Punkt gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt eine gerade Linie ſo legen, daß die von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten ſenkrechten in beſtimmten Entfernungen von dem gegebenen Punkte abſtehen.

Auflöſung. Fig. 38. Das Entfernungs-Verhältniß der ſenkrechten Linie von dem gegebenen Punkt ſey n : m. Die gegebene Linie ſey AB und der Punkt C. Man theile die gegebene Linie AB in das gegebene Verhältniß n : m nach §. 12. und bemerke den Punkt D, welcher die Linie in das Verhältniß von n : m theilt, verbinde dieſen Punkt mit dem gegebenen durch die Linie DC, errichte auf dieſer in den Punkt C eine ſenkrechte Linie FG, und ziehe von den Endpunkten A und B die Linien AF und BG parallel mit der Linie DC, ſo werden ihre Entfernungen von dem Punkte D im Verhältniſſe n : m ſtehen.

Beweis. Man vollende das Dreieck APF durch die Linien BP und PG. Vermöge der Conſtruction ſind die Linien AF und BG mit DC parallel, und ſtehen, da DC ſenkrecht auf FG aufſteht, auch ſenkrecht auf dieſer Linie auf. Da nun die, zwiſchen Parallel-Linien liegenden, Abſchnitte zweier gegen ſich geneigter Durchſchnitts-Linien unter ſich in gleichem Verhältniſſe ſtehen, ſo erhält man folgende Proportion:

$$AD : DB = FC : CG;$$

da nun die Linie AD und DB zu einander in dem Verhältniſſe wie n : m ſtehen, ſo iſt auch

$$FC : CG = n : m$$

d. h. die Abſchnitte und Entfernungen, welche durch die, ſenkrecht von den Endpunkten der Linie AB auf FG gefällten, Linien hervorgebracht werden, ſtehen in dem Verhältniß n : m, und entſprechen alſo den Forderungen der Aufgabe.

§. 31.

Aufgabe. Es ſind zwei unbeſtimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei begränzte gegeben. Man ſoll einen Punkt zwiſchen den unbeſtimmten Linien angeben, deſſen ſenkrechter Abſtand von beiden den gegebenen begränzten Linien gleich iſt. Fig. 39.

Auflöſung. Die unbegränzten Linien ſeyen AB und CD, die beiden Abſtands-Linien EF und GH. Man errichte auf einer der beiden unbeſtimmten Linien AB, die eine Linie EF, gegen CD zu, ſenkrecht, und auf der andern Linie CD die GH ſenkrecht, und ziehe durch ihre Endpunkte F und H mit den Linien, worauf ſie ſtehen, die Parallel-Linien MD und FD; verlängere ſie ſo, daß ſie ſich durchſchneiden, ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt Q der geſuchte.

Beweis. Die gegebene Linie GH iſt auf der Linie CD und die Linie EF iſt auf AB ſenkrecht errichtet. Die Linie HQ iſt mit CD parallel gezogen, alſo ſind alle zwiſchen den Parallel-Linien ſenkrecht errichteten Linien einander und der gegebenen Linie HG gleich. Das Nämliche gilt auch von der mit der Linie AB parallel gezogenen Linie QF. Beide Parallelen vereinigen ſich in dem Punkte Q, alſo iſt der Punkt Q, von welchem aus die ſenkrechten Abſtände QN und QM auf die Linie AB und CD gezogen ſind, den gegebenen Linien EF und GH gleich.

§. 32.

Aufgabe. Es ſind zwei unbeſtimmte Linien ihrer Richtung nach gegeben, und zwei begränzte. Man

soll einen, auſſer ihnen gelegenen, Punkt finden, deſſen ſenkrechter Abſtand von beiden den gegebenen begränzten Linien gleich iſt. Fig. 40.

Auflöſung. Die unbegränzten Linien ſeyen AB und CD, die beiden Abſtandslinien EF und GH. Man errichte in einerlei Richtung hin auf den Linien AB und CD die Linien EF und GH ſenkrecht und ziehe durch ihre Endpunkte mit den Linien, worauf ſie ſtehen, Parallel-Linien; verlängere ſie ſo, bis ſie ſich durchſchneiden, ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt Q der geſuchte, und die Linie MQ und NQ ſind den gegebenen Linien EF und GH gleich.

Der Beweis führt ſich leicht nach §. 31.

Anmerkung. Es iſt leicht erſichtlich, daß zwei Fälle möglich ſind für dieſe Aufgabe. Die Aufgabe iſt nämlich zweimal möglich, wenn der Punkt auſſerhalb der Linie liegen ſoll, denn die Linien GH und MQ laſſen ſich ſo auf beiden Linien AB und CD ſenkrecht errichten, daß ihr Vereinigungspunkt Q auf die Seite von CD fällt, oder ſo, daß er auf die entgegengeſetzte Seite von CD fällt. Eine ähnliche Bemerkung gilt von der Aufgabe des §. 31.

Laufen die beiden Linien AB und CD parallel, ſo iſt die Aufgabe, zwiſchen ihnen einen Punkt zu beſtimmen, nur dann möglich, wenn beiden Parallelen um die Summe der gegebenen begränzten Linien einander abſtehen. Die Beſtimmung des Punktes auſſerhalb der beiden iſt nur dann möglich, wenn die eine Linie dem ſenkrechten Abſtande beider Parallelen voneinander und der andern begränzten Linie gleich kommt.

§. 33.

Aufgabe. Es ſind zwei Linien ihrer Größe und Richtung nach gegeben. Man ſoll einen Punkt angeben, von wo aus ſich mit dieſen beiden Linien zwei gleichſchenklige Dreiecke beſchreiben laſſen. Fig. 41.

Auflöſung. Die Linien ſeyen AB und EC. Man halbire die beiden Linien nach §. 9. und errichte

auf ihren Mittelpunkten G und F zwei ſenkrechte Linien, nach der Richtung zu, in welcher ſie ſich durchſchneiden werden. Dieſer Durchſchnittspunkt D iſt der geſuchte Punkt, und von ihm aus werden die auf die Endpunkte der gegebenen Linien AB und EC gezogenen Linien zwei gleichſchenklige Dreiecke ADB und EDC erzeugen.

Beweis. Die Linie EF iſt der Linie FC vermöge der Conſtruction gleich. Die Linie FD bildet zwei rechte Winkel mit den genannten beiden Linien und gehört zu den beiden Dreiecken EDF und FDC. In dieſen Dreiecken ſind nun zwei Seiten und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel gleich. Hieraus folgt, daß die beiden Dreiecke congruent und die Linie ED der Linie DC gleich und alſo das Dreieck EDC ein gleichſchenkliges Dreieck ſey, das ſeine Spitze in dem Punkte D hat. Aehnliche Prämiſſen führen zu dem Schluß, daß das Dreieck ADB ein gleichſchenkliges iſt, deſſen Spitze in D liegt. Hieraus folgt alſo, daß auf oben angegebene Art der Punkt D gefunden wird, welcher in Verbindung mit den Endpunkten der gegebenen Linien AB und EC zwei gleichſchenklige Dreiecke erzeugt.

Hieran ſchließt ſich die Bemerkung, daß eine auf die Mitte der Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreiecks aufgeſtellte Senkrechte durch die Spitze oder durch den Vereinigungspunkt der beiden gleichen Schenkel des gleichſchenkligen Dreiecks geht.

§. 34.

Aufgabe. Es ſind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man ſoll einen Punkt zwiſchen beiden angeben, von dem aus zwei gegebene Linien mit ihren Endpunkten auf den gegebenen Linien auffallen und zugleich beſtimmte Winkel mit ihnen bilden. Fig. 42.

Auflöſung. Die beiden unbeſtimmten Linien ſeyen AB und AC, die begränzten Linien ſeyen DE und DF und die beiden Winkel ſeyen x und y. Man trage die Linien DE und DF, jede unter einem der gegebenen Winkel, an einem willkührlichen Punkte in der ihrer Richtung nach gegebenen unbeſtimm-

ten Linien AB und AC, ſo daß dieſe Linien GH = ED und pk = DF in das Innere der gegebenen Linien AB und AC gerichtet ſind, ziehe dann durch die Endpunkte H und K dieſer Linien Parallel-Linien mit denen, worauf ſie aufſtehen, daß dieſe Parallelen ſich durchſchneiden; ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt D der Punkt, von wo aus die Linien DK und DF, auf die Linien AB und AC aufgetragen, die gegebenen Winkel x und y bilden werden.

Beweis. Der Winkel y iſt dem gegegebenen Winkel y gleich, die Linie DH geht mit der Linie AB parallel vermöge der Conſtruction. Man ziehe die Linie DG, ſo entſtehen durch dieſe Linie die Dreiecke EDG und DGH, welchen die Linie DG gemeinſchaftlich iſt. Die Linie DG erzeugt vier Winkel, welche als Wechſelwinkel zwiſchen zwei Parallel-Linien einander gleich ſind, und es iſt $< z = z'$ und $< v = v'$. Aus der Gleichheit dieſer Linie und der zwei anliegenden Winkel folgt die Gleichheit der beiden Dreiecke EDG und DGH und hieraus die Gleichheit der Linien ED und GH und des dritten Winkels m' und m. Der Winkel m iſt aber auch ſeinem Wechſelwinkel y gleich. Hieraus ergibt ſich auch die Gleichheit der Winkel m' und y. Aehnliche Schlüſſe führen auf die Gleichheit der Linie kp und DF, und der Winkel x und x'. Aus dieſen Schlüſſen geht hervor, daß der, auf die angegebene Art aufgefundene, Punkt D eine ſolche Lage hat, daß die von ihm aus auf die beiden Linien AB und AC gefällten Linien DE und DF den gegebenen gleich ſind, und mit den Linien, worauf ſie auffallen, die beſtimmten Winkel bilden.

Anmerkung. Es leuchtet aus der angegebenen Conſtruction ein, daß nur ein Punkt zwiſchen beiden Linien möglich iſt, welcher den aufgeſtellten Forderungen genügt; denn da die Lage dieſes Punktes von dem Durchſchnittspunkte der beiden Parallelen abhängt und zwei Linien ſich nur in einem einzigen Punkte durchſchneiden können, ſo iſt alſo auch nur ein Punkt möglich. Aber dennoch ſind vier der Lage nach verſchiedene Auflöſungen möglich, denn die Linie DE hätte auch in der Richtung DE' gefällt werden können, wodurch zwei Fälle entſtehen, und ebenſo hätte DF in der Richtung DF' gefällt werden können, wodurch gleichfalls zwei Fälle erzeugt werden, die alle den aufgeſtellten Bedingungen entſprechen. Sind die gegebenen Winkel rechte, ſo ſind nur zwei Fälle möglich.

Dieſe Aufgabe läßt ſich auf gleich einfache Art lösen, wenn unter den nämlichen Bedingungen auſſerhalb der ihrer Richtung nach gegebenen Linien ein Punkt geſucht werden ſoll, welcher den Forderungen genügt.

Sind die beiden, ihrer Lage nach gegebenen, Linien parallel und die Winkel rechte, ſo iſt die Auflöſung für einen Zwiſchenpunkt nur dann möglich, wenn der ſenkrechte Abſtand der Parallelen der Summe der gegebenen Linien gleich kommt, für einen auſſerhalb gelegenen aber nur dann, wenn der Abſtand von der einen dem Unterſchied beider Linien gleich iſt. §. 31 und 32.

§. 35.

Aufgabe. Es ſind zwei Linien ihrer Lage nach gegeben. Man ſoll zwiſchen beide eine gegebene Linie ſo legen, daß ſie mit ihren Endpunkten auf beide Linien auffalle, und mit der einen einen beſtimmten Winkel bilde. Fig. 43.

Auflöſung. Die beiden unbeſtimmten Linien ſeyen AB und AC, die gegebene Linie GK, der Winkel x. Man trage an irgend einem Punkte in der Linie AC die gegebene Linie GK unter dem Winkel x an, und ziehe durch ihren Endpunkt D mit der Linie, worauf ſie auffteht, eine Parallele ſo, daß ſie, gehörig verlängert, die andere unbeſtimmte Linie AB durchſchneide. Man trage nun von dieſem Durchſchnittspunkte D der beiden Linien die gegebene Linie ED = GK auf, ſo wird der Winkel den ſie mit der Linie AC bildet, dem gegebenen Winkel gleich ſeyn.

Beweis. Man ziehe die Linie DG, ſo entſtehen dadurch zwei Dreiecke DGK und DEG, welche einander congruent ſind, weil in ihnen der Winkel z = z′ und v = v′, als Wechſelwinkel, die Linie DG, als zu beiden Dreiecke gehörig, ſich ſelbſt gleich iſt, und durch eine Seite und die zwei anliegenden Winkel ein Dreieck beſtimmt wird. Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel y und y′. Nun iſt aber auch der Winkel x = y, weil es Wechſelwinkel zwiſchen zwei Parallelen ſind; alſo fließt hieraus auch die Gleichheit des Winkels x und y′. Demnach iſt alſo die Linie DE der gegebenen gleich und bildet mit AC den gegebenen Winkel.

§. 36.

Aufgabe. Es ſind drei Linien gegeben. Man ſoll ſie an einem Punkte unter ſolchen Winkeln zuſammenſtellen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und gleich weit von einander abſtehen. Fig. 44.

Auflöſung. Die drei gegebenen Linien ſeyen F'E', G'E', K'E'. Man nehme die kleinſte von ihnen, und ſetze ſie doppelt aneinander, wodurch EFD entſteht; beſchreibe über ihr mit den beiden andern Linien das Dreieck GED, ſo daß GE = G'E' und K'E' = GD iſt, ziehe von der Spitze dieſes Dreiecks durch den Mittelpunkt F der Linie ED eine andere GK, welche doppelt ſo groß, als der Abſtand dieſes Mittelpunkts von der Spitze des Dreiecks iſt, und verbinde den Endpunkt K der Linie GK mit dem der Linie ED, ſo iſt die Aufgabe gelöſet, und EG, EF, EK ſind in dem Punkte E vereinigt.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt die Linie EG = E'G', EF = E'F', GD = K'E'; EF = FD, GF = FK. Da nun die Winkel x und y als Scheitelwinkel einander gleich ſind, ſo folgt hieraus, daß die Dreiecke GFD und EFK congruent, alſo auch, daß die Linien GD und EK einander gleich ſind. Da nun GD = K'E' iſt, ſo iſt auch EK = K'E'. Hieraus fließt alſo, daß ſich die drei gegebenen Linien in einem Punkte E vereinigen, und daß ihre Endpunkte G, F, K auf der geraden Linie GK ſo aufſtehen, daß dadurch dieſe Linie in zwei gleiche Theile getheilt wird.

§. 37.

Aufgabe. Es ſind drei Linien gegeben; man ſoll ſie an einem Punkte unter ſolchen Winkeln aneinander ſtellen, daß ihre Endpunkte auf einer geraden Linie ſo auffallen, daß ſie dieſelbe nach einem beſtimmten Verhältniſſe theilen. Fig. 45.

Die drei Linien ſeyen EF, EG, EK, und das Verhältniß, wornach die Linie durch das Auffallen ihrer Endpunkte getheilt werden ſoll, ſey 2 : 3.

Auflösung. Man nehme die kleinste der drei Linien, hier EF, theile sie nach §. 11. in drei Theile, setze die ganze Linie und $\frac{2}{3}$ von ihr in gerader Linie ED zusammen, bemerke den Punkt F, der die ganze Linie und $\frac{2}{3}$ trennt, bestimme eine Linie DG, welche $\frac{2}{3}$ von EK ist, beschreibe mit den beiden andern Linien EF und EG über der Linie ED ein Dreieck EDG, und ziehe von seiner Spitze G durch den Punkt F eine gerade Linie GK so, daß ihre Verlängerung FK $\frac{2}{3}$ von GF sey, und verbinde die beiden Endpunkte E und K durch eine gerade Linie EK, so wird diese der dritten Linie gleich seyn und der Aufgabe ein Genüge thun.

Beweis. Die Linien EF und EG sind den gegebenen Linien gleich, DF ist $\frac{2}{3}$ von EF, und GF $\frac{2}{3}$ von FK. Die Linie GD ist $\frac{2}{3}$ von EK. Der Winkel x und y sind als Scheitelwinkel einander gleich. Da nun FD in dem nämlichen Verhältniß zu EF steht, wie GF zu FK, und die Linien GF, DF und EF, FK in zwei Dreiecken einen gleichen Winkel einschließen, so folgt hieraus die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke, wozu sie gehören, und also auch folgende Proportion

$$GF : FK = GD : EK.$$

Da nun GF sich zu FK wie 2 : 3 verhält, so steht auch GD : EK im nämlichen Verhältnisse, GD aber ist $\frac{2}{3}$ von EK, also ist auch EK der gegebenen dritten Linie gleich, und hieraus folgt also, daß die Endpunkte der drei gegebenen Linien in gerader Richtung auf einer Linie liegen, welche dadurch in das Verhältniß wie 2 : 3 getheilt ist.

Anmerkung. 1) Soll die Linie, worauf die Endpunkte der gegebenen Linien aufstehen sollen, nach dem Verhältnisse n : m eingetheilt werden, so mache man nach §. 13. die Linie DF $= \frac{n}{m}$ von EF oder der gegebenen A, die Verlängerung FK aber $\frac{m}{n}$ von GF und vervollständige die Figur, so ist das Verlangte geschehen.

2) Aus der Auflösung zu dieser und der vorhergehenden Aufgabe entnimmt sich für das Verhältniß der gegebenen Linien unter einander folgendes: Die kleinste von den drei Linien muß so beschaffen seyn, daß sie doppelt genommen, oder daß dieselbe und der $\frac{n}{m}$te Theil von ihr kleiner ist, als die beiden Linien GD und EG.

weil ſonſt die Zeichnung des Dreiecks EGD und dadurch auch die Löſung der Aufgabe unmöglich wird.

§. 38.

Aufgabe. Einen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 46.

Erſte Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC. Man ſchneide von der Spitze des Winkels A aus auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke ab, AB und AC, und beſchreibe von den ſo eben erhaltenen Durchſchnittspunkten zwei ſich durchſchneidende Kreisbögen, und verbinde die Spitze des Winkels A mit dem Durchſchnittspunkte der Kreisbögen F durch eine gerade Linie, ſo halbirt die Linie AF den gegebenen Winkel.

Beweis. Die Linien AD und AC, eben ſo die Linien DF und EF ſind vermöge der Conſtruction einander gleich. Die Linie AF theilt die Figur AD FE in zwei congruente Dreiecke ADF und AEF, weil ſie beiden zugehört. Hieraus folgt, daß der Winkel DAF dem Winkel EAF gleich und alſo der Winkel BAC in zwei gleiche Theile getheilt iſt.

Zweite Auflöſung. Fig. 47. Der gegebene Winkel ey BAC. Man ſchneide auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke AD und AE ab, trage rückwärts von der Spitze des Winkels A den einen Schenkel AD = AF nach irgend einer Richtung, und verbinde den Endpunkt F der Linie AF mit den beiden Punkten D und E der Schenkel AD und AE, ſo iſt der Winkel EFD die Hälfte des gegebenen.

Beweis. Man verlängere die Linie FA nach G, daß ſie en gegebenen Winkel in zwei Theile p und q trenne. Da ie Linien AF, AD und AE vermöge der Conſtruction einander leich ſind, ſo erzeugt die Linie FG zwei gleichſchenklige Dreiecke mit zwei, auſſerhalb derſelben an der verlängerten Grundinie FAG gelegenen, Winkeln p und q. In den gleichſchenkligen Dreiecken FDA und FAE ſind die beiden Winkel x und x', y und y' einander gleich; alſo kann man ſie unter ſich verwechſeln. Da nun der äuſſere durch die verlängerte Grundlinie entſtandene Winkel den beiden innern im Dreiecke gegenüber ſtehenden Winkeln gleich iſt, ſo iſt $p = x + x' = 2x$,

und $q = y + y' = 2y$,

und hieraus erhält man, da p und q zusammen dem gegel nen Winkel BAC gleich sind

$$BAC = 2(y + x) = 2\,DFE,$$

d. h der Winkel BAC ist noch einmal so groß, als der Wi kel DFC und also ist EFD die Hälfte des Winkels BAC.

§. 39.

Aufgabe. Einen rechten Winkel in drei gleiche Thei zu theilen. Fig. 48.

Auflösung. Der gegebene rechte Winkel sey BA Man schneide von der Spitze A aus an einem Schenkel irge ein beliebiges Stück AD ab, und beschreibe über AD mit Linie AD zwei sich durchschneidende Kreisbögen, ziehe von zem Durchschnittspunkt F eine gerade Linie auf die Spi A des rechten Winkels, so wird der rechte Winkel durch di Linie so getheilt, daß der größere Winkel zweimal so groß als der kleinere. Man halbire darauf nach §. 38. den größe Winkel, so werden drei gleiche Winkel entstehen.

Beweis. Da die Linien AD, AF und DF einan gleich sind, so ist das Dreieck ADF ein gleichseitiges und a alle drei Winkel einander gleich, und also der Win $x = \frac{2}{3}$ R. Da nun der Winkel $x = \frac{2}{3}$ R, so ist, da B $= R$ ist, der Winkel z der dritte Theil eines Rechten, u also der Winkel x doppelt so groß als der Winkel z. W nun der Winkel x durch die Linie EG in zwei gleiche Th getheilt, so entstehen zwei Winkel, wovon jeder der dritte Th eines Rechten ist, und demnach wird also der rechte Win BAC durch obige Art in drei gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Sind an einem Punkt über einer geraden nie drei gleiche Winkel zu errichten, so wird der Zweck erreic wenn von dem gegebenen Punkte aus mit irgend einer Linie gleichschenkliges Dreieck errichtet und der dadurch entstandene Wi zweimal aneinander gesetzt wird.

§. 40.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel zu verdoppel Fig. 49.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC. Man

richte in der Mitte der beiden Schenkel AB und AC zwei ſenkrechte Linien und verlängere ſie ſo, daß ſie ſich ſchneiden, und ziehe von dem Durchſchnittspunkte M dieſer ſenkrechten Linien auf die Endpunkte der beiden Schenkel B und C gerade Linien, ſo iſt der, dem gegebenen Winkel BAC entgegengeſetzte, Winkel BMC der verlangte Winkel.

Beweis. Man ziehe eine Linie AF von A durch M nach F, ſo entſtehen durch ſie die beiden Dreiecke AMC und AMB mit den ihnen von auſſen anliegenden Winkeln p und q, welche den Winkel BMC bilden. Vermöge der Conſtruction iſt der Schenkel AC in zwei gleiche Theile getheilt, und MD ſenkrecht in D errichtet, alſo ſind die beiden an der Linie MD anliegende Winkel Rechte und einander gleich. Die Linie MD theilt das Dreieck AMC in zwei Dreiecke, welche zwei Linien und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel einzeln genommen gleich haben. Hieraus folgt die Congruenz der beiden Dreiecke, und ferner, da die Winkel x und y der nämlichen Linie MD entgegenſtehen, die Gleichheit dieſer Winkel. Nun iſt bekannt, daß der äuſſere an der verlängerten Grundlinie eines Dreieckes anliegende Winkel den beiden innern entgegengeſetzten gleich iſt, alſo iſt

$$< q = x + y$$

oder da x ſtatt y, als gleich groß, geſetzt werden kann,

$$q = 2x,$$

d. h. der Winkel q iſt noch einmal ſo groß als der Winkel x. Der Beweis, daß der Winkel p doppelt ſo groß als z iſt, führt ſich auf die nämliche Art, und demnach folgt alſo

$$p + q = 2z + 2x.$$

Da nun die beiden Winkel p und q dem Winkel BMC gleich und doppelt ſo groß als $z + x$, oder BAC ſind, ſo iſt der Winkel BMC doppelt ſo groß als der gegebene BAC.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe hätte auch mechaniſch, durch Anreihen der gegebenen Winkel an ſich ſelbſt, gelöst werden können. Hiebei iſt zu bemerken, daß vermöge der Conſtruction nur ſolche Winkel, welche 2 rechte Winkel oder darüber betragen, verdoppelt werden können. Den Graden nach kann jeder mögliche Winkel verdoppelt werden.

§. 41.

Aufgabe. Einen Winkel, der nicht größer iſt, als die Hälfte eines rechten Winkels, zu verdreifachen. Fig. 50.

Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC. Man verlängere den einen Schenkel AC auf beiden Seiten des Punktes A, beſchreibe mit irgend einem Stück des andern Schenkels AD ein gleichſchenkliges Dreieck ADC über AC, und verlängere unbeſtimmt die Linie DC in gerader Richtung, gegen den Punkt A zu. Nun beſchreibe man mit AD als Radius um den Punkt A einen Kreis, ſo daß ſeine Peripherie die verlängerte Linie DC in E ſchneide, und ziehe von dieſem Durchſchnittspunkte auf den Punkt A eine Linie, ſo iſt der Winkel EAF dreimal ſo groß als der gegebene.

Beweis. Der Winkel BAC iſt der gegebene Winkel, das Dreieck ADC iſt ein gleichſchenkliges, und ſomit ſind die beiden Winkel an der Grundlinie x und y einander gleich. Aus dem Punkte A iſt mit AD als Radius der Kreis FED gezogen. Demnach ſind die Linien AE und AD als ſeine Radien einander gleich, und bilden mit der Sehne ED ein gleichſchenkliges Dreieck, worin die beiden Winkel an der Grundlinie z und v einander gleich ſind. Der äuſſere Winkel eines Dreiecks iſt, wie bekannt, den beiden innern gegenüberſtehenden gleich; hieraus fließt $< z = y + x = 2x$,

ferner iſt $< m = v + y$.

Da nun anſtatt v der Winkel z und anſtatt y der Winkel x, als ihm gleich, geſetzt werden kann, ſo geht die vorige Gleichung über in $< m = z + x = 2x + x$,

und der Winkel m iſt alſo dreimal ſo groß, als der gegebene Winkel.

Anmerkung. Die Aufgabe, die hier durch Conſtruction gelöst iſt, hätte auch mechaniſch durch zweimaliges Anreihen des gegebenen Winkels bewirkt werden können, und dieß muß geſchehen, wenn der gegebene Winkel größer, als die Hälfte eines rechten Winkels iſt. Die Größe des Winkels M wird beſtimmt durch die Linie FA und durch die Linie, welche von dem Durchſchnittspunkte E auf die Spitze des Winkels A gefällt wird. So lange nun die Linie CE ſo fällt, daß ſie die Peripherie durchſchneidet, ſo lange wird die

nügetheilte Auflösung möglich seyn. Dieß hängt von der Größe des Winkels BAC ab. Ist nämlich der Winkel ADC ein stumpfer, so wird die Linie CE die Peripherie durchschneiden, ist er ein rechter, so wird die Linie EC die Peripherie berühren, ist er ein spitzer, so wird die Linie EC die Peripherie weder durchschneiden, noch berühren, sondern in irgend einer Entfernung ausserhalb der Kreislinie liegen, und also in letztem Falle der Auflösung obiger Aufgabe nicht genügen, wo denn die Aufgabe auf die mechanische Methode gelöst werden muß. Beträgt der Winkel, der verdreifacht werden soll, die Hälfte eines Rechten, so fällt Durchschnitts- und Berührungspunkt zusammen, der Ergänzungswinkel selbst ist der verlangte und dreimal größer, als die Hälfte eines Rechten. Ist der gegebene Winkel größer als die Hälfte eines Rechten, so kann man ihn in zwei Winkel zerlegen, und auf die angegebene Art verfahren.

§. 42.

Aufgabe. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, sechsmal zu vergrößern.

Auflösung. Man construire nach §. 41. einen Winkel, welcher dreimal so groß ist, als der gegebene, und verdoppele denselben nach §. 40., so ist das Verlangte geschehen.

Der Beweis entlehnt sich leicht aus den §§. 40 und 41.

§. 43.

Aufgabe. Einen Winkel zu construiren, der um die Hälfte größer als ein gegebener ist. Der Gegebene darf aber nicht größer als die Hälfte eines Rechten seyn.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC. Man construire nach §. 41. einen Winkel, der dreimal so groß als der gegebene ist, und halbire den gefundenen nach §. 38.

Der Beweis entlehnt sich leicht aus den §§. 38 und 41.

§. 44.

Aufgabe. Es ist ein Winkel gegeben. Man soll einen Punkt bestimmen, der mit zwei, von ihm auf auf die Endpunkte der Schenkel des gegebenen

Winkels gezogenen, Linien einen Winkel erzeuge, welcher doppelt ſo groß, als der gegebene iſt. Fig. 51.

Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC. Man halbire die beiden Schenkel des gegebenen Winkels und errichte auf ihren Mittelpunkten M und M' zwei ſenkrechte Linien, die ſich, gehörig verlängert, durchſchneiden, ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt P der geſuchte Punkt, und der von ihm aus durch die beiden, auf die Endpunkte B und C der Schenkel AB und AC gefällten, Linien erzeugte Winkel BPC doppelt ſo groß, als der gegebene.

Beweis. Man ziehe von der Spitze A des gegebenen Winkels BAC durch den gefundenen Punkt P die Linie APD, ſo wird dadurch der gegebene Winkel BAC in den Winkel x und y und der gefundene BPC in den Winkel v und z getheilt. Da der Schenkel AB in M' halbirt und die Linie M'P ſenkrecht auf dem Halbirungspunkt aufgeſetzt iſt, ſo ſind alle Linien, welche von einem gemeinſchaftlichen Punkte in der Linie M'P auf die Endpunkte der Linie AB gezogen ſind, einander gleich und bilden mit der Linie AB ein gleichſchenkliges Dreieck. Somit iſt alſo das Dreieck ABP ein gleichſchenkliges und der Winkel x dem Winkel x' gleich. Da nun der durch Verlängerung der Grundlinie entſtandene Winkel den beiden innern entgegengeſetzten gleich iſt, ſo iſt

$$< v = x + x',$$

oder da x für x' geſetzt werden kann

$$< v = 2\,x.$$

Auf gleiche Art wird auch bewieſen, daß

$$< z = 2\,y.$$

Hieraus ergibt ſich durch Zuſammenzählen der beiden Winkel

$$v + z = 2\,x + 2\,y,$$

oder

$$v + z = 2\,(x + y)$$

und wenn ſtatt $v + z$ der ihnen gleiche Winkel BPC und ſtatt $x + y$ der gegebene geſetzt wird, ſo entſteht

$$< BPC = 2 < BAC,$$

d. h. der gefundene Winkel BPC iſt doppelt ſo groß als der gegebene BAC, oder der auf obige Art gefundene Punkt er-

zeugt mit den beiden Endpunkten der Schenkel des Winkels einen Winkel, welcher doppelt ſo groß, als der gegebene, iſt.

Anmerkung. Der geſuchte Punkt P wird entweder zwiſchen die beiden Schenkel des gegebenen Winkels, oder auf einen derſelben, oder auſſerhalb beider fallen, was leicht aus dem Zuſammentreffen der beiden ſenkrechten Linien M'P und MP erhellt. Der geſuchte Punkt wird in den einen Schenkel fallen, wenn die auf dem Mittelpunkte des einen Schenkels aufgeſetzte ſenkrechte Linie in den Mittelpunkt des andern fällt. Er wird zwiſchen beide Schenkel fallen, wenn die Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Schenkel mit einander verbindet, größer iſt, als jede der beiden ſenkrechten Linien M'P oder MP; er wird auſſerhalb von ihnen fallen, wenn dieſe Mittelpunktslinie kleiner als eine der ſenkrechten M'P oder MP iſt.

Für den Fall, als die ſenkrechte Linie MP in den Mittelpunkt P des Schenkels AC fällt, iſt der Beweis Fig. 52. ganz einfach, denn der Winkel x iſt dem Winkel x' gleich, als Winkel an der Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreiecks, alſo iſt

$$\sphericalangle BPC = 2x, \quad \text{oder} \quad \sphericalangle BPC = 2\,BAC.$$

Der Beweis für den Fall, als der Punkt P auſſerhalb der beiden Schenkel fällt, gibt ſich auf folgende Art (Fig. 53). Das Dreieck ABP iſt ein gleichſchenkliges, weil die Linie AP der Linie BP gleich iſt, und alſo ſind auch die beiden Winkel an der Grundlinie AB, x und x' einander gleich, und dieſen beiden, oder einem von ihnen, doppelt genommen iſt der äuſſere Winkel BPD gleich. Hieraus fließt

$$2 \sphericalangle x = BPD \text{ oder } 2 \sphericalangle (v + y) = BPC + CPD.$$

Um aus dieſer Gleichung die urſprünglichen Winkel BAC und BPC abzuleiten, müſſen die Winkel y und CPD ausgeſchieden werden. Dieß geſchieht leicht, wenn man berückſichtigt, daß APC ein gleichſchenkliges Dreieck iſt und daß deßwegen ſeine Winkel an der Grundlinie AC, y und y' einander gleich ſind, und der äuſſere CPD beiden zuſammen, oder einem von ihnen, doppelt genommen, gleich iſt. Hieraus fließt

$$2 \sphericalangle y = CPD.$$

Wird dieſe Gleichung von der obigen abgezogen, ſo entſteht

$$2 \sphericalangle v + 2 \sphericalangle y - 2 \sphericalangle y = BPC + CPD - CPD,$$

$$\text{oder} \quad 2 \sphericalangle v = BPC, \quad 2 \sphericalangle BAC = BPC.$$

alſo iſt der, auf obige Art gefundene, Punkt der geſuchte.

§. 45.

Aufgabe. Es iſt irgend ein Winkel und eine Linie gegeben, man ſoll die Linie ſo mit den Schenkeln des gegebenen Winkels verbinden, daß ihre End-

punkte in die beiden Schenkel fallen und gleich Stücke, von dem Scheitelpunkte des Winkels aus auf ihnen abſchneide. Fig. 52.

Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC, die Linie DE. Man ſchneide von der Spitze des Winkels A aus auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke AD und AE ab, lege durch die Punkte D und E die gegebene Linie DE = DG, daß ſie mit ihrem einen Endpunkte D auf den einen Schenkel in D aufſtehe und mit dem andern in gerader Richtung auf G entweder zwiſchen oder auſſerhalb der Schenkel des gegebenen Winkels falle. Ziehe von dem andern Endpunkte G mit dem gegenüber liegenden Schenkel AB eine Linie parallel, ſo daß ſie den Schenkel AC in irgend einem Punkte N trifft. Durch dieſen Punkt lege man eine Linie mit DG parallel, ſo wird dieſe Linie MN den Forderungen Genüge leiſten.

Beweis. Es iſt zweierlei zu beweiſen: 1) daß die Linie MN der Linie DE, und daß 2) die beiden abgeſchnittenen Stücke einander gleich ſind. Man ziehe die Hülfslinie MG; ſo iſt, da DG mit MN und GN mit DM vermöge der Conſtruction parallel läuft, der Winkel y = v und x = x als Wechſelwinkel. Die Linie MG erzeugt mit den Linien DG, MD und GN, MN zwei Dreiecke DGM und MGN welche einander congruent, da in ihnen eine Linie und die anliegenden Winkeln gleich ſind. Hieraus folgt, daß die Linie MN mit DG gleich iſt.

2) Die Linie MN läuft mit DE parallel. Durch die Linie DE wird alſo das Dreieck AMN in zwei ähnliche Dreiecke zerlegt, wornach alſo folgende Proportion gilt

AD : AE = AM : AN.

Da nun die Linie AD und AE in dem Verhältniß der Gleichheit ſteht, ſo folgt aus obiger Proportion, daß auch die Linie AN und GN in der nämlichen Beziehung unter ſich ſtehen müſſen. Hieraus fließt alſo, daß die Linie MN der gegebenen Linie DE gleich, mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln aufgeſtellt iſt, und von ihnen gleiche Stücke abſchneidet.

§. 46.

§. 46.

ufgabe. Es iſt ein Winkel von unbeſtimmten Schenkeln und eine Linie gegeben. Man ſoll die gegebene Linie ſo zwiſchen die beiden Schenkel des Winkels legen, daß ihre Endpunkte in dieſelben fallen und ſie mit dem Einen einen beſtimmten Winkel bilde. Fig. 55.

Auflöſung. Der gegebene Winkel mit unbeſtimmten enkeln ſey BAC, die Linie DE, der Winkel, den die Linie mit dem einen Schenkel bilden ſoll, ſey x. Man trage irgend einem Punkte D' eines der beiden Schenkel, die ge- ne Linie DE = D'E' unter dem gegebenen Winkel x an; e durch den Endpunkt E' der Linie D'E' mit dem Schenkel , worauf ſie aufſteht, eine Paralle E'E, welche den andern enkel AC in dem Punkte E trifft, ſchneide von D' aus Linie D'D = E'E auf D'A ab und verbinde die beiden Punkte durch eine gerade Linie DE mit einander, ſo iſt dieſe Linie geſuchte.

Beweis. Die Linie D'D läuft mit der Linie E'E parallel iſt ihr gleich. Da nun die Linien D'E' und DE zwiſchen gleichen Parallel-Linien eingeſchloſſen ſind, ſo ſind ſie einander gleich und parallel. Hieraus ergibt ſich alſo, der Winkel ADE dem Winkel x und die Linie DE der gebenen gleich iſt.

Anmerkung. Soll die Linie ſo zwiſchen die beiden Schenkel und AC gelegt werden, daß ſie mit beiden gleiche Winkel bilde, fällt ſie mit der Aufgabe des vorigen §. zuſammen.

§. 47.

ufgabe. Es iſt ein Winkel und ein zwiſchen ſeinen Schenkeln liegender Punkt gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt zwiſchen die Schenkel des Winkels eine Linie ſo legen, daß die hierdurch

entſtandene Zwiſchenlinie durch dieſen Punkt i zwei gleiche Theile getheilt werde.

Erſte Auflöſung. Fig. 56. Der Winkel ſey BAC der gegebene Punkt D. Man ziehe von dem Verein gungspunkt A der beiden Schenkel durch den Punkt D ei gerade Linie AG ſo, daß ſie doppelt ſo groß werd als die Entfernung des gegebenen Punktes D von dem Ve einigungspunkte A der beiden Schenkel. Ziehe von dem En punkte G der Zwiſchen-Linie AG auf einen der beiden Sch kel AC eine Parallele GM mit der gegenüberſtehenden, daß erſtere in M durchſchneide, und ziehe von dieſem Durchſchnitt punkte M durch den gegebenen Punkt M eine die Linie A ſchneidende Linee MDK, ſo iſt dieß die verlangte Linie.

Beweis. Man ziehe die Linie KG. Die Linie GM parallel gezogen mit AK, die Linie AD iſt der Linie DG gleic Die Linie MK und AG durchſchneiden die beiden parallel laufende Linien. Nun ſind die beiden innern Wechſelwinkel z und v und die beiden Scheitelwinkel y und x, und ebenſo, vermö der Conſtruction, die Linien AD und DG einander gleich. E eine Linie und die beiden anliegenden Winkel Größe u Geſtalt eines Dreiecks beſtimmen, ſo ſind alſo die beiden Dre ecke ADK und MDG congruent, alſo auch die Linien, welc gleichen Winkeln gegenüberſtehen, gleich, und demnach alſo die Linie MD der Linie DK gleich, und der Punkt M liegt in der Mitte zwiſchen M und K.

2te Auflöſung. Fig. 57. Man ſetze an den Punkt unter irgend einem Winkel eine gerade in zwei gleiche Thei getheilte Linie AGF an, ziehe von dem gegebenen Punkt D ei Linie DE auf die mittlere Linie AC parallel mit der gegenübe liegenden AB und verbinde den Mittelpunkt G der Linie A mit dem Punkte E und ziehe durch den Endpunkt F eine Lin parallel mit DE, daß ſie die mittlere Linie treffe, und zie von dieſem Punkt K durch den gegebenen Punkt D eine Lin auf die gegenüberliegende Linie, ſo wird der Punkt D die L nie KM in zwei gleiche Theile theilen.

Beweis. Da die Linie FK parallel mit GE gezogen iſt ſo entſtehen zwei Dreiecke FAK und GAE, welche einander ähnli

ſind. Ebenſo entſtehen durch die, mit der Linie AM parallel gehende Linie EI) die zwei ähnlichen Dreiecke AKM und EKD, und es gelten daher in dieſen folgende Proportionen

AG : FG = AE : EK,

ferner AE : EK = MD : DK

und hieraus fließt folgende AG : FG = MD : DK.

Da nun nach der Conſtruction die Linie AG zu der Linie GF in dem Verhältniß der Gleichheit ſteht, ſo müſſen auch die Linien MD und DK in dem der Gleichheit ſtehen, und die Linie KM iſt durch den Punkt D in zwei gleiche Theile getheilt.

3te Auflöſung. Fig. 58. Man verbinde die Punkte D und A durch eine gerade Linie AD und trage durch den Punkt A in irgend einer Richtung die Linie FE ſo, daß FA = AE iſt, ziehe von den Punkten F und E mit der Linie AD die Parallelen FG und EK ſo, daß ſie die Linien AB und AC in den Punkten G und K durchſchneiden, verbinde dieſe durch die gerade Linie GK und ziehe mit ihr die Linie LM durch den gegebenen Punkt D parallel, ſo iſt LD = DM.

Beweis. Da die Linien FG und EK mit AH parallel ſind, ſo verhält ſich

FA : AE = GH : HK,

da aber die Linie FA der Linie AE gleich iſt, ſo iſt auch die Linie GH der Linie HK gleich.

Mit der Linie GK iſt die Linie LM parallel gezogen, demnach fließen aus den ähnlichen Dreiecken ALD und AGH, ADM und AHK folgende Proportionen

AH : HD = GH : LD,

und AH : HD = HK : DM,

und hieraus ergibt ſich folgende

GH : LD = HK : DM,

oder durch Verſetzung

GH : HK = LD : DM.

Da nun die Linien GH und HK einander gleich ſind, ſo ſind auch die Linien LD und DM einander gleich; demnach iſt die Linie LM ſo zwiſchen die beiden Linien AC und AB angetragen, daß ſie durch den Punkt D geht und durch den Punkt D in zwei gleiche Theile eingetheilt wird.

§. 48.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und ein zwischen beiden Schenkeln liegender Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß die beiden durch den Punkt erzeugten Abschnitte in einem bestimmten Verhältnisse stehen.

Erste Auflösung. Fig. 59. Der Winkel sey BAC, der Punkt D, das Verhältniß, worin die beiden Abschnitte stehen sollen, sey 2 : 5.

Man ziehe von dem Vereinigungspunkte der beiden Schenkel auf den gegebenen Punkt eine Linie CD, theile sie in zwei gleiche Theile (§. 10.) setze einen dieser Theile von D aus fünfmal aneinander, wodurch die Linie AG gewonnen wird. Ziehe von dem Punkte G eine Linie GM auf den einen Schenkel mit der gegenüberstehenden parallel, und lege von dem Durchschnittspunkt M dieser Linie eine Linie durch den Punkt D, bis sie die gegenüberstehende Linie trifft, so wird der Punkt D die Linie MK nach dem verlangten Verhältnisse theilen.

Beweis. Die Linie MG geht parallel mit AB vermöge der Construction. Die Linie AG durchschneidet die beiden parallel laufenden Linien und erzeugt die beiden gleichen innern Wechselwinkel z und v. Die Winkel x und y sind als Scheitelwinkel einander gleich. Da die Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken, einzeln genommen, die Aehnlichkeit der Dreiecke bedingt, so sind die Dreiecke ADK und MDG einander ähnlich, und es stehen ihre Seiten in einem gleichen Verhältniß zu einander. Demnach ist also

$$AD : DG = KD : MD;$$

ferner ist vermöge der Construction

$$AD : DG = 2 : 5$$

und hieraus folgt ferner

$$DK : DM = 2 : 5.$$

Demnach ist eine Linie MK gefunden, welche der Punkt D in zwei Theile theilt, die in dem Verhältniß wie 2 : 5 stehen.

Zweite Auflösung. Fig. 60. Man setze eine aus sieben gleichen Theilen bestehende Linie AF unter irgend einem

Winkel an eine der gegebenen Linien an, bemerke den Durchſchnittspunkt G, welcher die Linie nach dem gegebenen Verhältniſſe theilt, ziehe von dem gegebenen Punkte D eine Linie DE auf die mittlere Linie parallel mit der gegenüberliegenden AC, verbinde die beiden Durchſchnittspunkte E und G durch eine gerade Linie mit einander, und lege mit ihr durch den Punkt F eine Linie parallel, welche die mittlere Linie in K trifft, und ziehe durch dieſen und den gegebenen Punkt D eine gerade Linie, ſo geht dieſe Linie durch D und iſt in D nach dem verlangten Verhältniß getheilt.

Beweis. Die Linie FK geht parallel mit der Linie GE und dadurch wird die Linie AK in zwei mit den Linien AG und GF übereinſtimmende Abſchnitte getheilt. Die Linie ED iſt in dem Dreiecke AKM parallel mit der Linie AM gezogen und wird alſo durch den Punkt D in zwei mit den Linien AE und EK übereinſtimmende Abſchnitte getheilt. Hieraus ergeben ſich nun folgende Proportionen:

$$AG : GF = AE : EK,$$
$$\text{und} \quad AE : EK = MD : DK,$$
$$\text{alſo} \quad AG : GF = MD : DK.$$

Da nun AG zu GF in dem Verhältniſſe wie 2 : 5 ſtehet, ſo müſſen auch die Linien MD und DK im nämlichen Verhältniſſe zu einander ſtehen, und man erhält

$$MD : DK = 2 : 5,$$

d. h. die Linie MK wird durch den Punkt D in das gegebene Verhältniß getheilt.

Dritte Auflöſung. Fig. 61. Man trage auf der durch A gelegten Linie FE die Linien AE und FA ſo an, daß AE 2 und FA 5 unter ſich gleiche Theile habe, ziehe von A aus auf D die gerade Linie AD und mit dieſer von den Endpunkten F und E die Linien FG und EK parallel, verbinde die Endpunkte G und K dieſer Linien durch die gerade Linie GK und mit ihr die Linie LM durch den gegebenen Punkt D parallel, ſo theilt der Punkt D die Linie LM nach dem gegebenen Verhältniß.

Der Beweis führt ſich leicht nach dem, in der dritten Auflöſung, zum vorigen §. Geſagten.

Anmerkung. Hätte eine Linie gefunden werden sollen, welche durch den Punkt D in zwei, sich wie m : n verhaltende, Stücke getheilt werden, so wird die Größe der Linie AG, AF oder FE nach §. 11. bestimmt, und dann kann auf jede der drei angegebenen Auflösungsarten verfahren werden.

§. 49.

Aufgabe. Es ist ein Winkel von unbestimmten Schenkeln und zwischen beiden ein Punkt gegeben. Man soll von diesem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels so fällen, daß sie in einem bestimmten Verhältniß stehen, und die eine mit dem Schenkel, worauf sie auffällt, einen bestimmten Winkel bilde. Fig 62.

Auflösung. Der Winkel von unbestimmten Schenkeln sey BAC, der Punkt zwischen beiden D, das Verhältniß n : m, worin die beiden Linien zu einander stehen sollen, sey durch die Linien mn und mp angedeutet, der Winkel, unter welchem die eine auf den Schenkel auffallen soll, sey x. Man verbinde die Spitze A des Winkels BAC durch eine gerade Linie AD mit dem Punkte D, und trage die kleinere Linie mn unter dem gegebenen Winkel x so auf den einen Schenkel AC auf, daß ihr anderer Endpunkt m in die Linie AD falle. An diesen Punkt trage man die andere Linie mp so auf, daß ihr anderer Endpunkt in p in den Schenkel AC falle, darauf ziehe man durch den gegebenen Punkt D die Linie ED mit nm und DF mit mp parallel, so sind diese Linien die gesuchten.

Beweis. Da die Linie ED mit nm und DF mit mp parallel gezogen ist, so sind die Dreiecke Anm und AED, Amp und ADF einander ähnlich. Hieraus fließen folgende Proportionen

Am : AD = nm : ED,
Am : AD = nm : DF,

und hieraus

nm : ED = mp : DF,

oder

nm : mp = ED : DF,

d. h. die von dem Punkte D auf die Schenkel AB und AC gezogenen Linien DE und DF stehen in dem Verhältnisse, wie

die gegebenen Linien nm und mp. Da ferner die Linie nm unter dem Winkel x an AD aufgetragen wurde, und die Linie ED mit nm parallel läuft, ſo ſtehen alſo beide Linien in dem gegebenen Verhältniſſe und die eine fällt unter dem gegebenen Winkel auf den einen Schenkel AB auf.

Anmerkung. Die Aufgabe iſt immer möglich, ſobald die kleinere Linie unter dem gegebenen Winkel x zwiſchen die Schenkel, des durch Ziehung der Linie AD entſtandenen größern Partialwinkels eingetragen wird, wie ſich dieß leicht erkennen läßt. Im entgegengeſetzten Falle wird ſie nicht immer möglich ſeyn.

Die Aufgabe iſt leichter zu conſtruiren, wenn überhaupt nur verlangt wird, daß die von dem Punkte D auf die beiden Schenkel zu fällenden Linien unter beliebigen Neigungen gezogen werden können. Es läßt ſich auch leicht einſehen, daß verſchiedene Lagen der Linien unter einander möglich ſind.

§. 50.

Aufgabe. Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte eine die beiden Schenkel durchſchneidende Linie legen, daß die Entfernung zwiſchen dem gegebenen Punkte und dem einen Schenkel der Zwiſchenlinie zwiſchen beiden Schenkeln gleich ſey. Fig. 63.

Auflöſung. Der Winkel ſey BAC, der Punkt D. Man ziehe durch den Punkt D mit dem ihm zunächſt liegenden Schenkel AB eine Parallele DE und verbinde den Vereinigungspunkt A der beiden Linien durch irgend eine gerade Linie mit einem Punkte E der Linie AD und mache AF = AE, nun ziehe man von dem Punkte F mit der Linie AB eine Parallele FH, welche den Schenkel AC in irgend einem Punkte H trifft und ziehe die Linie DH, ſo ſind die beiden Entfernungen DK und KH einander gleich.

Beweis. Nach der Conſtruction iſt EA = AF, und die Linie ED mit der KA, ebenſo die Linie FH mit KA, alſo auch die Linie ED mit FH parallel, daraus folgt nun die Proportion EA : AF = DK : KH.

Da aber die Linien EA und AF einander gleich sind, so sind auch die Linien DK und KH einander gleich, und die Auflösung thut den Forderungen der Aufgabe Genüge.

Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Punkt D innerhalb des durch Verlängerung der Linien BA und CA entstehenden Scheitelwinkels E'AB' liegt, denn alsdann wird von jeder möglichen Linie, die von dem Punkt D aus auf eine von den Linien AB oder AC gezogen wird, nur eine, aber nie beide durchschnitten werden.

Wird verlangt, daß die Entfernung zwischen dem Punkte und der einen Linie, und die zwischen beiden Linien in dem gegebenen Verhältnisse n : m stehen soll, so wird sich die Aufgabe leicht lösen lassen, wenn die Linien EA und AF nach diesem Verhältnisse nach §. 12. bestimmt werden und dann sofort die Construction vollendet wird.

§. 51.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und ausserhalb seiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte eine Linie auf den einen Schenkel und von dem Durchschnittspunkt beider eine Linie auf den andern Schenkel fällen, daß beide hierdurch entstandene Linien in einem gegebenen Verhältniß stehen und letztere unter einem gegebenen Winkel auf den zweiten Schenkel auffalle. Fig. 64.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, der Punkt D, das Verhältniß n : m, worin beide Linien zu einander stehen sollen, sey durch die Linien NM und MP ausgedrückt, der Winkel, unter welchem die Linie NM zwischen beiden Schenkeln auffallen soll, sey x. Man verbinde die Spitze A des Winkels BAC mit dem gegebenen Punkt D durch eine gerade Linie, trage auf dem Schenkel AC unter dem gegebenen Winkel x die Linie NM nach §. 46. so an, daß ihr Endpunkt M den Schenkel AB in dem Punkte M treffe und von diesem Punkte M die Linie MP so, daß ihr Endpunkt P in die Linie AD oder ihre Verlängerung falle, ziehe dann mit der Linie PM durch den Punkt D die Linie DE und

durch E mit MN die Linie EF parallel, ſo ſind die Linien DE und DF die geſuchten Linien.

Beweis. Da die Linie DE mit PM und EF mit MN parallel gezogen iſt, ſo ſind die Dreiecke ADE und APM, AEF und AMN einander ähnlich, und hieraus ergeben ſich folgende Proportionen AE : AM = DE : PM,
und AE : AM = EF : MN,
und hieraus DE : PM = EF : MN,
oder DE : EF = PM : MN.
Demnach ſtehen die Linien DE und EF in dem gegebenen Verhältniſſe wie n : m. Da die Linie MN unter dem Winkel x zwiſchen AB und AC gelegt wurde und EF mit MN parallel geht, ſo ſteht auch die Linie EF unter dem gegebenen Winkel EF auf, demnach entſprechen die Linien DE und EF den gegebenen Bedingungen.

Anmerkung. Die Aufgabe iſt ſo lange möglich, als der ſenkrechte Abſtand der Linie AD von dem Punkte M kleiner, als die Linie MP iſt, ſie wird unmöglich, wenn dieſer größer wird. Die Möglichkeit der Aufgabe hängt daher, wie leicht einzuſehen iſt, von der ſchicklichen Zuſammenſetzung der gegebenen Prämiſſen ab.

Die Aufgabe vereinfacht ſich ſehr, wenn überhaupt nur verlangt wird, daß zwei Linien DE und EF gezogen werden ſollen, die in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen, ohne daß ein Winkel in die Conſtruction verflochten iſt. In die Aufgabe kann auch die Bedingung mit aufgenommen werden, daß die Linie DE unter einem gegebenen Winkel auf AB auffallen ſoll.

§. 52.

Aufgabe. Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels ſo ziehen, daß ſie in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen und die eine unter einem beſtimmten Winkel auffalle. Fig. 65.

Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC, der Punkt D, das Verhältniß n : m, worin die beiden Linien ſtehen ſollen, ſey nach §. 12. durch die Linien MN und MP ausgedrückt, der beſtimmte Winkel, unter dem die eine auffallen